

Załącznik nr 8

MATEMATYKA

Zakres merytoryczny obowiązujący na egzaminie doktorskim w SGH

1. Teoria zbiorów, topologia, teoria miary i całki

1. Zbiory, działania na zbiorach. Zbiór liczb rzeczywistych (prosta rzeczywista) i jego podzbiory - zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, niewymiernych. Pojęcie iloczynu kartezjańskiego. Płaszczyzna R^2 i przestrzeń trójwymiarowa R^3 jako iloczyny kartezjańskie. Relacje dwuargumentowe, rodzaje relacji, relacja równoważności.
2. Pojęcie funkcji. Rodzaje funkcji (różnowartościowe (iniekcje), "na" (suriekcje), "1-1" (bijeckje)). Składanie funkcji, funkcje odwrotne. Przykłady.
3. Moce zbiorów, równoliczność zbiorów, liczby kardynalne (przykłady). Twierdzenie Cantora-Bernsteina, Twierdzenie Cantora. Moce zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów, moc zbioru punktów płaszczyzny R^2 i przestrzeni trójwymiarowej R^3 .
4. Uporządkowanie zbiorów, zbiory liniowo uporządkowane. Zbiory dobrze uporządkowane (definicja). Liczby naturalne i zasada indukcji matematycznej. Przykłady zastosowania zasady indukcji matematycznej.

Literatura obowiązkowa do tematów 1-4:

1. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa (wiele wydań).
2. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

Literatura dodatkowa do tematów 1-4:

1. A. Mostowski, K. Kuratowski, *Teoria mnogości*, Monografie Matematyczne Tom 27, IM PAN, Warszawa 1952.
5. Definicja metryki, przykłady metryk na prostej rzeczywistej i na płaszczyźnie R^2 . Definicja przestrzeni metrycznej. Podzbiory otwarte, domknięte przestrzeni metrycznej. Podzbiory zwarte przestrzeni metrycznej. Definicja przestrzeni topologicznej. Podzbiory otwarte, domknięte przestrzeni topologicznej. Wnętrze, domknięcie podzbioru przestrzeni topologicznej. Podzbiory zwarte przestrzeni topologicznej.
6. Pojęcie granicy i zbieżności ciągu punktów przestrzeni metrycznej. Ciągłe odwzorowania przestrzeni metrycznych. Przestrzenie metryczne zupełne. Przestrzenie metryczne zwarte. Kryterium zwartości podprzestrzeni (podzbioru) przestrzeni euklidesowej R^n .
7. Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu zwężającym. Przykłady zastosowania Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu zwężającym.

Literatura obowiązkowa do tematów 5-7:

1. R. Engelking, K. Sieklucki, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa (wiele wydań).
2. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

Literatura dodatkowa do tematów 5-7:

1. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

8. Sigma-ciało – definicja i proste przykłady. Sigma-ciało zbiorów borelowskich przestrzeni metrycznej lub ogólniej – przestrzeni topologicznej. Pojęcie przestrzeni mierzalnej. Pojęcie miary (nieujemnej). Pojęcie przestrzeni z miarą. Przykłady.
9. Konstrukcja miary Lebesgue'a na prostej rzeczywistej i ogólniej – w R^n . Przykłady zbiorów mierzalnych. i niemierzalnych. Funkcje mierzalne i niemierzalne. Definicja, przykłady. Konstrukcja wielowymiarowej całki Lebesgue'a $\int_{R^n} f(x) dx$ funkcji mierzalnej $f: R^n \rightarrow R$ (szkic).
10. Różnice i podobieństwa między całką Lebesgue'a, Riemanna i Riemanna-Stieltjesa funkcji o argumentie rzeczywistym. Funkcja pierwotna (całka Newtona-Leibniza). Funkcje całkowne i niecałkowne. Definicja, przykłady.

Literatura obowiązkowa do tematów 8-10:

1. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa (wiele wydań).
2. W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

Literatura dodatkowa do tematów 8-10:

1. A. Birkholc, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

2. Algebra, algebra liniowa i geometria, przestrzenie unormowane

11. Definicja grupy. Przykłady grup przemennych i nieprzemennych. Działania na elementach grupy. Orbity. Definicja ciała. Przykłady ciał.
12. Ciało liczb zespolonych. Postać algebraiczna i trygonometryczna liczby zespolonej, zależności między nimi. Działania na liczbach zespolonych. Wzór de Moivre'a.
13. Zasadnicze twierdzenie algebry i rozkład wielomianu na czynniki w ciele liczb rzeczywistych i zespolonych.

Literatura obowiązkowa do tematów 11-13:

1. A. I. Kostrykin, *Wstęp do algebry*, PWN, Warszawa 1984 (jest wydanie późniejsze, w trzech tomach).
2. W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Monografie Matematyczne Tom 11, IM PAN, Warszawa 1946.

Literatura dodatkowa do tematów 11-13:

1. A. Białynicki-Birula, *Algebra*, PWN, Warszawa (wiele wydań).
14. Przestrzenie liniowe. Baza przestrzeni liniowej. Podprzestrzenie liniowe, przestrzenie rozpinające i ich bazy.
 15. Przekształcenia (odwzorowania, operatory) liniowe. Jądro i rząd przekształcenia liniowego. Monomorfizmy, epimorfizmy i izomorfizmy.
 16. Podprzestrzenie niezmiennicze przekształcenia liniowego. Wektory własne i wartości własne przekształcenia liniowego. Interpretacja, przykłady. Przykłady zastosowania wektorów i wartości własnych odwzorowania liniowego.
 17. Macierz odwzorowania liniowego w bazach. Definicja. Związek pomiędzy operacjami na odwzorowaniach a operacjami na macierzach (składanie, odwzorowanie odwrotne). Rząd macierzy, wyznacznik macierzy. Interpretacja, własności.
 18. Normy. Przestrzenie liniowe unormowane. Przestrzenie Banacha. Pojęcie granicy i zbieżności ciągu punktów przestrzeni unormowanej. Istnienie granicy ciągu Cauchy'ego w przestrzeni Banacha. Definicje, przykłady.
 19. Kula jednostkowa w przestrzeni unormowanej. Odwzorowania liniowe przestrzeni unormowanych. Norma odwzorowania liniowego przestrzeni unormowanych. Definicje, przykłady.
 20. Iloczyn skalarny, norma indukowana przez iloczyn skalarny. Przestrzenie unitarne, przestrzenie Hilberta. Definicje, przykłady.
 21. Nierówność Schwarz'a (wraz z dowodem). Postacie nierówności Schwarz'a w wybranych przestrzeniach unitarnych. Cosinus kąta między wektorami w przestrzeni unitarnej. Ortogonalność (prostopadłość) wektorów.
 22. Baza ortogonalna i ortonormalna przestrzeni unitarnej. Zupełna baza ortogonalna i ortonormalna przestrzeni Hilberta. Ortogonalizacja Gramma-Schmidta. Przykład przestrzeni Hilberta o bazie zupełnej z nieskończoną liczbą wektorów. Rozwinięcie wektora z przestrzeni Hilberta w szereg wektorów z (zupełnej) bazy ortonormalnej.

Literatura obowiązkowa do tematów 14-22:

1. A. I. Kostrykin, J. I. Manin, *Algebra liniowa i geometria*, PWN, Warszawa 1993.
2. W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Monografie Matematyczne Tom 11, IM PAN, Warszawa 1946.
3. W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

Literatura dodatkowa do tematów 14-17:

1. A. I. Kostykin, J. I. Manin, *Wstęp do algebry. Tom 2. Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 2023.

Literatura dodatkowa do tematów 18-22:

1. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

3. Rachunek różniczkowy funkcji jednej i wielu zmiennych rzeczywistych

23. Pochodna 1. rzędu funkcji jednej zmiennej. Interpretacja. Pochodne wyższych rzędów funkcji jednej zmiennej. Definicje, przykłady funkcji n -krotnie różniczkowalnych i nieróżniczkowalnych. Wzór Taylora. Reszta we wzorze Taylora. Rozwinięcie funkcji w szereg Taylora. Przykłady rozwinięć najważniejszych funkcji w szereg Taylora.
24. Pochodne cząstkowe funkcji (odwzorowania) wielu zmiennych 1. Rzędu i wyższych rzędów. Pochodna kierunkowa. Różniczkowalność odwzorowań. Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych. Przykłady.
25. Ekstrema lokalne i globalne funkcji jednej i wielu zmiennych. Ekstrema warunkowe. Twierdzenie Weierstrassa o istnieniu wartości największej i wartości najmniejszej rzeczywistej funkcji ciągłej na zbiorze zwartym. Mnożniki Lagrange'a i ich interpretacja ekonomiczna. Warunki Kuhna-Tuckera.

Literatura obowiązkowa do tematów 23-25:

1. G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, Tom I*, PWN, Warszawa (wiele wydań).
2. 2. K. Sydsaeter, P. Hammond, A. Seierstad, A. Strom, *Further Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2005.

Literatura dodatkowa do tematów 23-25:

1. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

4. Elementy analizy zespolonej

26. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej. Szeregi potęgowe zmiennej zespolonej. Promień zbieżności szeregu potęgowego. Pochodna szeregu potęgowego.
27. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna zmiennej zespolonej. Sinus i cosinus zmiennej zespolonej. Definicje, rozwinięcia w szeregi potęgowe, własności.

Literatura obowiązkowa do tematów 26-27:

1. F. Leja, *Funkcje analityczne i harmoniczne*, Monografie Matematyczne Tom 29, IM PAN, Warszawa 1952.

2. W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa (wiele wydań).
Literatura dodatkowa do tematów 26-27:
1. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

5. Rachunek prawdopodobieństwa

28. Przestrzeń zdarzeń elementarnych. Funkcja prawdopodobieństwa.
Przestrzeń (trójka) probabilistyczna. Zmienne losowe, jako odwzorowanie mierzalne. Rozkład zmiennej losowej jako miara na przestrzeni jej wartości. Przykłady.
29. Wartość oczekiwana i inne charakterystyki zmiennej losowej o wartościach rzeczywistych (wariancja, momenty, momenty centralne, kwantyle). Warunkowa wartość oczekiwana. Przykłady, istnienie, interpretacja. Nierówność Czebyszewa i przykłady jej zastosowania.
30. Mocne i słabe prawo wielkich liczb. Centralne Twierdzenie Graniczne. Sformułowanie, przykłady zastosowań. Przykłady, gdy prawa wielkich liczb lub Centralne Twierdzenie Graniczne nie zachodzą.

Literatura obowiązkowa do tematów 23-15:

1. J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa (wiele wydań).
2. A. A. Borowkow, *Rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1975.
- Literatura dodatkowa do tematów 11-13:
1. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, Tom I, Tom II*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

6. Materiały dostępne w Internecie

Polecane strony internetowe:

<http://pldml.icm.edu.pl/pldml/browse/articles-hipldml.action>
<https://mst.mimuw.edu.pl/>
<https://wazniak.mimuw.edu.pl>

Uwaga

Szczegółowe pytania egzaminacyjne formułuje egzaminator powołany w ramach komisji ds. egzaminu doktorskiego.