

SZKOŁA GŁÓWNA HANDLOWA W WARSZAWIE

Kolegium Analiz Ekonomicznych

Optymalna struktura portfela ubezpieczeniowego w kontekście zabezpieczenia
przed ryzykiem długowieczności

Arkadiusz Filip

Autoreferat rozprawy doktorskiej
przygotowanej pod kierunkiem dra hab.
Mariusza Skalby

Warszawa, marzec 2018

Wstęp

Przedmiotem rozprawy doktorskiej jest analiza możliwości naturalnej immunizacji portfela zakładu ubezpieczeń na życie w warunkach zmieniającej się śmiertelności ubezpieczonych. Ryzyka śmiertelności i długowieczności są jednymi z podstawowych ryzyk, z jakimi spotyka się zakład ubezpieczeń na życie, prowadząc swoją działalność. O ile ryzyko śmiertelności, polegające na tym, że faktyczna śmiertelność ubezpieczonych różni się od wartości oczekiwanej z powodów losowych, może być w dużej mierze ograniczone poprzez zapewnienie odpowiednio dużego i zróżnicowanego portfela ubezpieczonych, o tyle ryzyko długowieczności, którego istota polega na trwałych zmianach oczekiwanej śmiertelności w przyszłości, dotyka zwykle w podobny sposób całego portfela ubezpieczonych. Zjawisko rozwijającej się długowieczności dobrze ilustruje fakt, że zgodnie z tablicami trwania życia dla Polski publikowanymi przez Główny Urząd Statystyczny w okresie 27 lat od 1990 roku do 2016 roku przeciętne trwanie życia w Polsce wydłużyło się o ok. 12% (z 66 do 74 lat) dla mężczyzn i 9% (z 75 do 82 lat) dla kobiet¹. Zmiany te są jeszcze większe w przypadku analizy osób starszych, np. przeciętne dalsze trwanie życia mężczyzny 60-letniego wydłużyło się o 26% (z 15 do 19 lat), zaś kobiety 60-letniej o 23% (z 20 do 24 lat)². W przypadku długoterminowych produktów sprzedawanych przez zakłady ubezpieczeń na życie ryzyko związane ze zmianami umieralności ubezpieczonych może więc być istotne.

Problem zabezpieczania się zakładów ubezpieczeń na życie przed ryzykiem długowieczności dotyka w głównej mierze produktów rentowych, czyli takich, w których towarzystwo ubezpieczeniowe zobowiązuje się wypłacać ubezpieczonemu określoną regularną płatność do momentu śmierci. Świadczenia rentowe kalkulowane są w oparciu o ustalone założenia demograficzne i istotne odchylenie faktycznej śmiertelności od założeń może przekładać się na poważne straty zakładu ubezpieczeń. Obecnie w Polsce udział produktów rentowych w ofercie zakładów ubezpieczeń na życie jest bardzo mały i w związku z tym problem zabezpieczania się przed ryzykiem długowieczności nie jest właściwie obecny w bieżącej działalności polskich towarzystw ubezpieczeniowych. Znacznie większą ekspozycję na to ryzyko wykazują zakłady ubezpieczeń w wielu krajach Europy Zachodniej czy Stanach Zjednoczonych, gdzie często oferują one komplementarny wobec publicznego prywatny system zabezpieczenia emerytalnego. Niemniej jednak jest to problem, który zwłaszcza w ostatnich latach jawi się jako wyzwanie dla systemów emerytalnych.

¹ Dane na podstawie tablic trwania życia publikowanych przez Główny Urząd Statystyczny w Polsce na stronie: <http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/ludnosc/trwanie-zycia/trwanie-zycia-tablice,1,1.html>.

² *Ibidem*

W literaturze poświęconej zagadnieniu zabezpieczenia portfela ubezpieczeniowego przed ryzykiem długowieczności spotkać można różne podejścia do problemu. Jednym z nich jest szukanie odpowiednich instrumentów zabezpieczających na rynkach finansowych, takich jak specjalne typy obligacji (*longevity bonds*) czy swapów (*longevity swaps*)³, których wypłaty uzależnione są od indeksu śmiertelności. Jest to dobry sposób zabezpieczenia dla towarzystwa ubezpieczeniowego, niemniej jednak wiąże się on z istotnymi kosztami zakupu odpowiednich instrumentów, nie gwarantuje również, że instrumenty będą odpowiednio dopasowane do konkretnego portfela zakładu ubezpieczeń. Drugim sposobem zabezpieczenia jest budowa modeli służących do prognozowania przyszłych wskaźników umieralności i oparcie na nich wyceny produktów ubezpieczeniowych. Szczególnie popularne są model Lee-Cartera (LC)⁴ oraz model stochastyczny Cairnsa-Blake'a-Dowda (CBD)⁵. Za pomocą takich modeli zakłady ubezpieczeń są w stanie lepiej estymować przyszłe wypłaty i dzięki temu nieco zmniejszyć ryzyko. Niemniej jednak zarówno estymacja jak i prognoza na podstawie tych modeli obarczone są błędami, przez co empiryczna realizacja wskaźników śmiertelności w przyszłości może istotnie odbiegać od prognozowanej i ryzyko na jakie narażony jest zakład ubezpieczeń nie jest w pełni zabezpieczone. Trzecim wreszcie sposobem zabezpieczenia jest wykorzystanie naturalnej immunizacji, jaką zapewnia odpowiednia struktura portfela ubezpieczeniowego. Różne produkty ubezpieczeniowe w różny sposób reagują na zmiany śmiertelności wśród ubezpieczonych. W przypadku produktów ochronnych, takich jak ubezpieczenia na życie, spadek wskaźników śmiertelności przekłada się na mniejsze wypłaty, a co za tym idzie na dodatkowy zysk dla towarzystwa ubezpieczeniowego. W przypadku produktów rentowych jest odwrotnie: wydłużanie długości życia ubezpieczonych powoduje, że świadczenia wypłacane są przez zakład ubezpieczeń dłużej, co przynosi mu straty. Można by więc próbować tak dobrać strukturę portfela, aby straty na części produktów były pokrywane przez zyski na pozostałych, przez co cały portfel będzie niewrażliwy na zmiany śmiertelności. Jest to jednak zagadnienie trudne, gdyż wartość portfela jest determinowana przez wskaźniki śmiertelności, które są różne dla każdego wieku i mogą zmieniać się w przyszłości w sposób nie do końca przewidywalny, przy czym nie da się przy wyznaczaniu optymalnej struktury

³ Szerzej o różnorodnych instrumentach zabezpieczających przed ryzykiem długowieczności – zob.: D. Blake, M. Morales, *Longevity Risk and Capital Markets: The 2014-15 Update*, Journal of Risk and Insurance 84, s. 279-297 (2017).

⁴ Zob.: R. Lee, L. Carter, *Modeling and forecasting U.S. mortality*, Journal of the American Statistical Association 87, s. 659-671 (1992).

⁵ Zob.: A.J.G. Cairns, D. Blake, K. Dowd, *A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration*, The Journal of Risk and Insurance 73, s. 687-718 (2006).

portfela uwzględnić wszystkich możliwych scenariuszy śmiertelności i konieczne są pewne założenia upraszczające.

Tło literaturowe

Zagadnienie naturalnej immunizacji portfela ubezpieczeniowego poprzez dobranie odpowiedniej struktury produktów pojawia się w literaturze naukowej od niedawna. Pierwsze tego typu opracowania zostały opublikowane w pierwszym dziesięcioleciu obecnego wieku. Na szczególną uwagę zasługują badania Samuela H. Coxa i Yijii Lin, którzy w 2007 roku opublikowali wyniki swoich analiz potwierdzające postawioną tezę badawczą, że naturalna immunizacja znajduje odzwierciedlenie w rzeczywistych cenach produktów oferowanych przez zakłady ubezpieczeń⁶. Na podstawie danych o wysokościach składki jednorazowej za dożywotnią rentę w momencie zakupu przez 65-letniego mężczyznę w latach 1995-1998 w różnych zakładach ubezpieczeń oszacowali model ekonometryczny, który pokazał, że im wyższy udział ubezpieczeń na życie w portfelu tym niższa jest cena za produkt rentowy. Odkrycie to świadczyło o tym, że naturalna immunizacja występuje w praktyce zakładów ubezpieczeń, nie dawało jednak odpowiedzi na pytanie w jaki sposób zakład może wyznaczyć optymalną strukturę portfela, która pozwoli zminimalizować ekspozycję na ryzyko długowieczności. Odpowiedź na to pytanie uzyskali J. L. Wang, H. C. Huang, S. S. Yang i J. T. Tsai, którzy w roku 2010 opublikowali wyniki swoich badań, w których przedstawili koncepcję wyznaczenia optymalnej struktury portfela ubezpieczeniowego opartą o tzw. durację śmiertelności (*mortality duration*)⁷. Idea tej koncepcji polegała na tym, aby w portfelu składającym się z dwóch produktów (jednym z nich jest ubezpieczenie na życie a drugim renta życiowa) dobrać ich strukturę w taki sposób, by duracja odpowiadająca wrażliwości wartości portfela na zmiany intensywności umieralności była równa 0. Duracja dla poszczególnych produktów liczona była w sposób przybliżony poprzez porównanie bazowej wartości produktu z wartością otrzymaną przez przesunięcie wektora intensywności umieralności o pewną stałą. Było to pierwsze badanie, którego wyniki mogły służyć zakładom ubezpieczeń do wyznaczenia optymalnej struktury portfela i analizy różnic pomiędzy rzeczywistą a optymalną strukturą. Podejście to było w dalszych latach rozwijane głównie poprzez dodawanie do istniejącego modelu nowych elementów takich jak stochastyczne modele śmiertelności, modele

⁶ Zob.: S. H. Cox, Y. Lin, *Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks*, North American Actuarial Journal 11, s. 1-15 (2007).

⁷ Zob. J. L. Wang, H. C. Huang, S. S. Yang, J. T. Tsai, *An Optimal Product Mix for Hedging Longevity Risk in Life Insurance Companies: The Immunization Theory Approach*, The Journal of Risk and Insurance 77, s. 473-497 (2010).

prognozujące przyszłą śmiertelność (jak np. wspomniane wcześniej modele LC i CBD) czy modele stopy procentowej.

Przedmiot rozprawy doktorskiej i hipotezy badawcze

Przedmiotem rozprawy doktorskiej jest zaprezentowanie autorskiego modelu wyznaczania optymalnej struktury portfela ubezpieczeniowego pozwalającej na jego zabezpieczenie przed ryzykiem długowieczności. Model ten koncepcyjnie zbliżony jest do podejścia opartego na duracji śmiertelności zaproponowanego przez Wang i in. (2010), różni się jednak przyjętymi założeniami i metodami obliczeniowymi. W odróżnieniu od Wang i in. (2010) zamiast podejścia przybliżonego i obliczenia efektywnej duracji, w rozprawie rozwinięte zostało podejście analityczne (wyznaczenie wzoru na optymalną strukturę portfela poprzez analityczne obliczenie pochodnych względem intensywności śmiertelności), dlatego też zaproponowana metoda w rozprawie doktorskiej została określona jako metoda analityczna. Aktuariałna wartość bieżąca przyszłych wypłat dla każdego z produktów, czyli również dla całego portfela ubezpieczeniowego, zdefiniowana została jako funkcja zależna między innymi od stopy procentowej i intensywności umieralności. We wszystkich obliczeniach przyjmowana jest płaska i niezmienna struktura stóp procentowych, intensywność umieralności zaś traktowana jest jako zmienna, która ma wpływ na wartość portfela. Ponieważ tak zdefiniowana funkcja wartości portfela jest zależna od wielowymiarowej zmiennej (intensywności umieralności dla każdego wieku) przyjmowane jest dodatkowe założenie, że relatywne zmiany intensywności umieralności są stałe niezależnie od wieku. Innymi słowy, intensywność umieralności dla osoby w wieku x i w roku kalendarzowym t zakładana jest na poziomie $\mu_x^t = k \cdot \mu_x^0$, gdzie μ_x^0 to intensywność umieralności osoby w wieku x obserwowana w roku, w którym ma miejsce obliczenie optymalnej struktury portfela. Dzięki temu zabiegowi funkcja wartości portfela uzależniona jest tylko od jednej zmiennej czyli k . Następnie, poszukiwana jest struktura portfela, dla której pochodna względem k jest równa 0 (przy założeniu początkowej wartości $k = 1$). Główne różnice w stosunku do podejścia Wang i in. polegają więc na założeniu multiplikatywnych a nie addytywnych zmian intensywności umieralności oraz przeprowadzeniu analitycznych obliczeń w miejsce symulacyjnego wyznaczania wrażliwości.

Podstawowe hipotezy badawcze

W rozprawie zweryfikowano następujące hipotezy badawcze:

- Istnieją możliwości czerpania korzyści z naturalnej immunizacji przez zakłady ubezpieczeń poprzez dobranie odpowiedniej struktury portfela ubezpieczeniowego, tak aby potencjalne straty z tytułu wydłużania się średniego trwania życia na rentach życiowych były równoważone przez zyski na polisach ubezpieczenia na życie.
- Metoda analityczna daje lepszy efekt zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności niż podejście oparte na duracji dzięki dokładniejszemu wyznaczeniu wrażliwości na zmiany śmiertelności oraz przyjęciu bardziej realistycznych założeń (założenie o multiplikatywnych zmianach intensywności umieralności jest bardziej uzasadnione w kontekście zmian tablic trwania życia dla Polski publikowanych przez GUS w okresie 1990-2016 od założenia o addytywnym charakterze tych zmian).
- Metoda analityczna daje zbliżone efekty zabezpieczenia w porównaniu do podejścia wykorzystującego dynamiczne tablice trwania życia oszacowane na podstawie modeli prognozujących przyszłą śmiertelność, takich jako model Lee-Cartera czy model CBD.

Metoda badania i wyniki

Hipotezy badawcze zostały zweryfikowane w rozprawie doktorskiej za pomocą symulacji wypłat z tytułu rent życiowych i ubezpieczeń na życie w różnych scenariuszach. Obliczenia przeprowadzono głównie w arkuszu kalkulacyjnym MS Excel, do części z nich (takich jak np. estymacja parametrów modelu LC i modelu CBD) wykorzystano pakiety R i Gretl. W bieżącym rozdziale zaprezentowane zostaną główne wyniki przeprowadzonych analiz w kontekście weryfikowanych hipotez badawczych.

Występowanie efektu zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności poprzez optymalizację struktury portfela

Aby wykazać występowanie efektu zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności rozważono hipotetyczny przypadek zakładu ubezpieczeń, który sprzedaje jedynie polisy ubezpieczenia na życie oraz renty życiowe za składkę jednorazową oraz rozważono jak zmienia się aktuarialna wartość bieżąca wypłat zakładu z tytułu świadczeń wraz ze zmianami śmiertelności. Przedstawiona poniżej tabela przedstawia przykładowe wyniki dla sytuacji

w której dożywotnie polisy ubezpieczenia na życie z sumą ubezpieczenia 100 000 PLN sprzedawane są 40-letnim kobietom, zaś dożywotnie renty życiowe o rocznej płatności 10 000 PLN 60-letnim kobietom, intensywność oprocentowania wynosi 5%, jednorazowa składka ubezpieczeniowa płatna z góry obliczona jest przy użyciu tablic trwania życia opublikowanych przez GUS dla roku 1990, faktyczna śmiertelność ubezpieczonych kształtuje się zaś zgodnie z innymi tablicami trwania życia, przykładowo dla roku 2000, 2010 i 2016.

Tabela 1: Wrażliwość wartości portfela na zmiany tablic trwania życia – przykładowa analiza dla kobiet

	Ubezpieczenie na życie	Renta życiowa	Portfel
Tablice z roku 1990 – pobrana składka	1 403 141 498,17 zł	2 732 005 742,78 zł	4 135 147 240,95 zł
Tablice z roku 2000	1 290 893 400,99 zł	2 858 966 299,94 zł	4 149 859 700,93 zł
<i>zmiana procentowa</i>	<i>-8,000%</i>	<i>4,647%</i>	<i>0,356%</i>
Tablice z roku 2010	1 162 206 986,81 zł	2 997 891 107,28 zł	4 160 098 094,08 zł
<i>zmiana procentowa</i>	<i>-17,171%</i>	<i>9,732%</i>	<i>0,603%</i>
Tablice z roku 2016	1 094 084 709,33 zł	3 057 440 148,55 zł	4 151 524 857,88 zł
<i>zmiana procentowa</i>	<i>-22,026%</i>	<i>11,912%</i>	<i>0,396%</i>

Przeprowadzona analiza pokazuje, że zmiana tablic trwania życia z roku 1990 na rok 2016 prowadzi do wzrostu aktuarialnej wartości bieżącej wypłat z tytułu rent życiowych o 11,9% w stosunku do pobranej składki oraz spadku aktuarialnej wartości bieżącej wypłat z tytułu ubezpieczeń na życie o 22,0% w stosunku do pobranej składki. Zgodnie z oczekiwaniami kierunek zmian jest przeciwny. Zastosowanie metody analitycznej do optymalizacji struktury portfela ubezpieczeniowego powoduje, że dla całości portfela odchylenie aktuarialnej wartości bieżącej wypłat od pobranej łącznej składki wynosi zaledwie 0,4%. Nie udało się osiągnąć idealnego zabezpieczenia przed zmianami śmiertelności, niemniej jednak otrzymany wynik świadczy o dobrym poziomie immunizacji, co potwierdza postawioną hipotezę badawczą.

Analogiczne analizy przeprowadzone zostały dla innych kombinacji wieku ubezpieczonych oraz dla mężczyzn, prowadząc do podobnych wniosków.

Porównanie jakości zabezpieczenia metody analitycznej i podejścia opartego na duracji

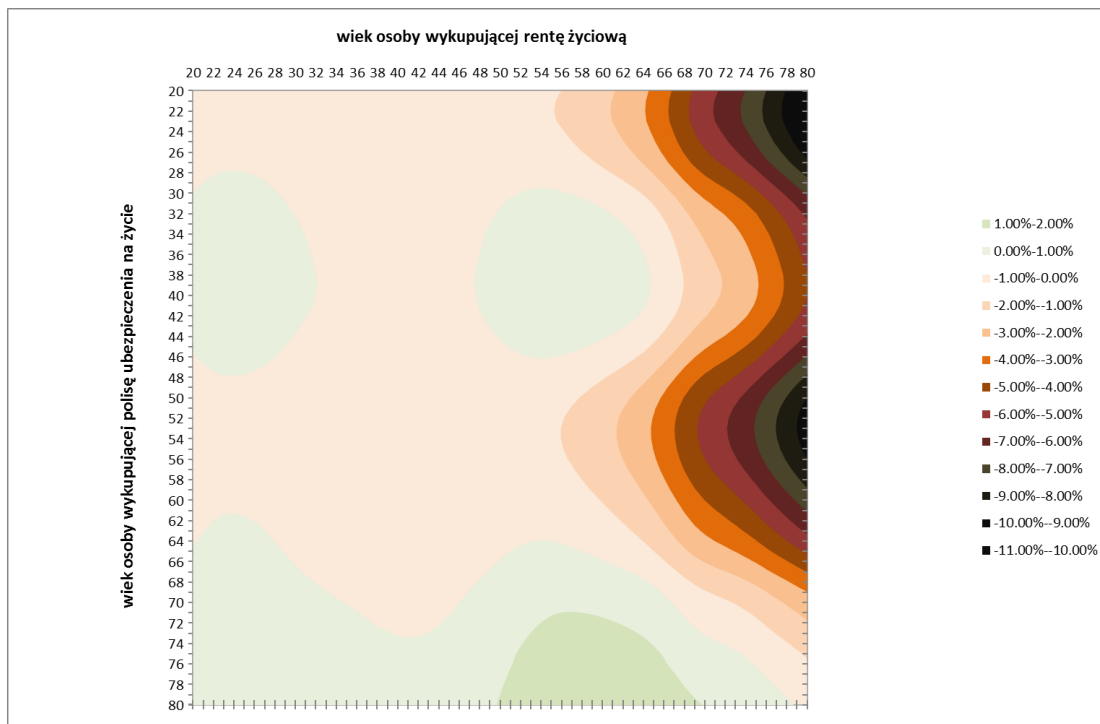
Porównanie jakości zabezpieczenia otrzymanego przez zastosowanie metody analitycznej oraz zastosowanie podejścia opartego na duracji odbyło się poprzez przeprowadzenie symulacji w oparciu o historyczne zmiany śmiertelności w Polsce zgodnie z tablicami trwania życia publikowanymi przez Główny Urząd Statystyczny. W

skonstruowanym w tym celu modelu rozważano sytuację w której zakład ubezpieczeń dokonuje obliczenia optymalnej struktury portfela w oparciu o tablice trwania życia dla Polski z roku 1990 i sprzedaje polisy ubezpieczenia na życie oraz polisy rentowe zgodnie z wyznaczoną strukturą. Rozważane są oddzielnie przypadki, gdy ubezpieczonymi są mężczyźni oraz kobiety (z uwagi na różniące się w zależności od płci wskaźniki umieralności) a także różne scenariusze wieku ubezpieczonych (od 20 do 80 lat). Daje to łącznie 3721 kombinacji dla mężczyzn oraz 3721 kombinacji dla kobiet (61 możliwych wartości wieku ubezpieczonego kupującego ubezpieczenie na życie oraz 61 możliwych wartości ubezpieczonego kupującego polisę rentową). Polisy są sprzedawane maksymalnie na okres 26 lat, nie dłużej jednak niż do ukończenia przez ubezpieczonego 100 lat życia (okres ochronny trwa od 1 stycznia 1991 roku do 31 grudnia 2016 roku, chyba że wcześniej ubezpieczony skończy 100 lat). Podejście to miało na celu wykorzystanie pełnej historii tablic trwania życia publikowanych przez GUS⁸. Od ubezpieczonych w modelu pobrano w pierwszym dniu składkę jednorazową obliczoną przy użyciu tablic trwania życia z roku 1990, w kolejnych latach śmiertelność ubezpieczonych kształtowała się zgodnie z tablicami opublikowanymi przez GUS dla danego roku i była różna od pierwotnie założonej przez zakład ubezpieczeń co prowadziło do niższych lub wyższych wypłat świadczeń niż zakładane w momencie obliczenia składki. Ze względu na różny charakter produktów ubezpieczeniowych zakład ubezpieczeń osiągał zyski na umowach ubezpieczenia na życie (zmniejszanie się wskaźników umieralności w kolejnych latach przekładało się na niższe wypłaty świadczeń z tytułu zgonu), lecz generował straty na polisach rentowych (wydłużające się trwanie życia ubezpieczonych powodowało wydłużanie się okresu pobierania świadczeń rentowych). W tak zbudowanym modelu założono dwie sytuacje: w pierwszej struktura portfela (tj. liczba sprzedanych umów ubezpieczenia na życie i polis rentowych) określona była za pomocą metody analitycznej, w drugiej zaś za pomocą podejścia opartego na duracji. Model pozwalał więc na bezpośrednie porównanie obu metod na tle historycznych zmian śmiertelności w Polsce oraz pozwalał porównać konsekwencje finansowe dla zakładu ubezpieczeń zastosowania każdej z tych metod. Dla każdej kombinacji wieku ubezpieczonych, oddzielnie w przypadku, gdy ubezpieczonymi są mężczyźni i kobiety, obliczono odchylenie wartości bieżącej łącznych wypłat z tytułu świadczeń (wyznaczonej przy użyciu historycznych tablic trwania życia) od zakładanej aktuarialnej wartości bieżącej wypłat uwzględnionej przy kalkulacji składki ubezpieczeniowej. Odchylenia te zaprezentowano na

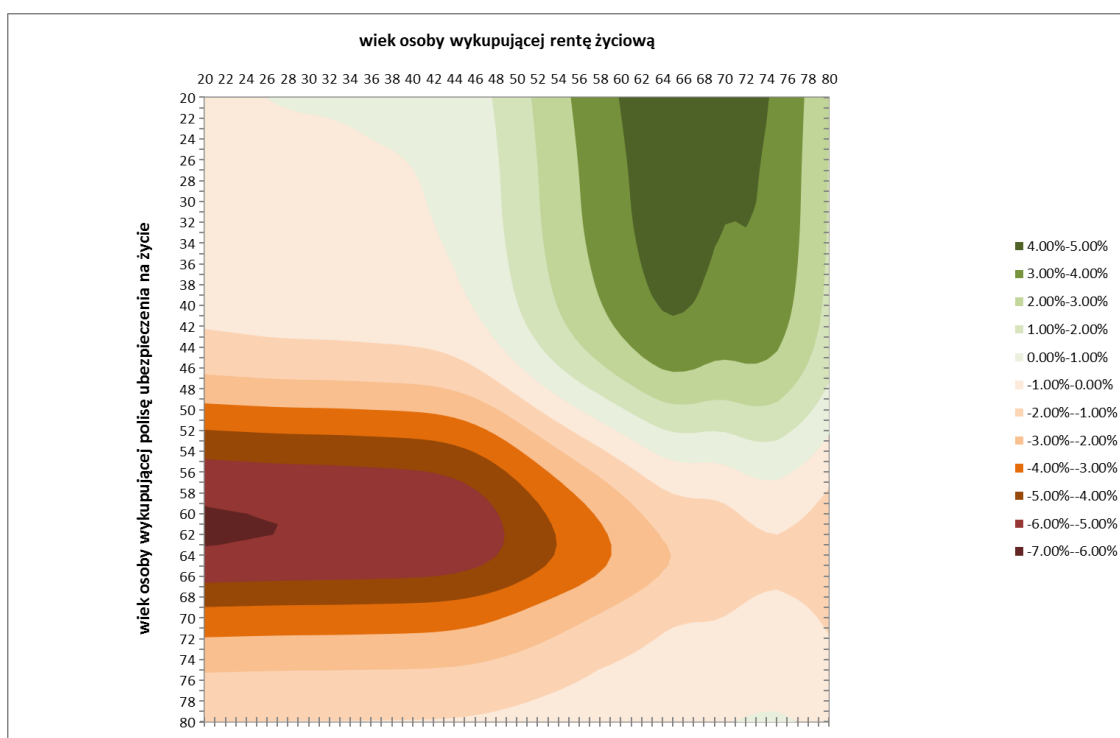
⁸ Istnieją dane o dłuższej historii opublikowane na stronie Human Mortality Database (www.mortality.org), obejmujące okres od roku 1958. W rozprawie doktorskiej postanowiono jednak wykorzystać wyłącznie dane GUS, w celu uzyskania wewnętrznej spójności.

poniższych wykresach (wykresy przedstawiają jedynie wyniki dla kobiet, analiza przeprowadzona dla mężczyzn prowadzi do analogicznych wniosków):

Rysunek 1. Wrażliwość wartości portfela ubezpieczeniowego na zmiany śmiertelności przy zachowaniu optymalnej struktury portfela wyznaczonej za pomocą metody analitycznej dla kobiet w zależności od wieku



Rysunek 2. Wrażliwość wartości portfela ubezpieczeniowego na zmiany śmiertelności przy zachowaniu optymalnej struktury portfela wyznaczonej za pomocą podejścia opartego na duracji dla kobiet w zależności od wieku



Na powyższych wykresach zaznaczono względne odchylenie wartości bieżącej wypłat zrealizowanych przez zakład ubezpieczeń od pobranej składki przy założeniu różnych kombinacji wieku ubezpieczonych (wiek osób zawierających ubezpieczenie na życie uwzględniony jest na osi pionowej, zaś wiek osób wykupujących rentę życiową uwzględniony jest na osi poziomej). Im ciemniejszy kolor tym większe odchylenie od zakładanego poziomu. Różnymi odcieniami koloru czerwonego oznaczono kombinacje dla których wartość bieżąca rzeczywistych wypłat była niższa od pobranej składki, różnymi odcieniami koloru zielonego zaś kombinacje dla których wartość bieżąca wypłat była wyższa od oczekiwanej. Im ciemniejszy kolor tym większe odchylenie, im jaśniejszy kolor tym mniejsze odchylenie, a co za tym idzie lepsze zabezpieczenie portfela przed zmianami intensywności śmiertelności. Porównanie powyższych wykresów pozwala stwierdzić, że zastosowanie metody analitycznej prowadzi zdecydowanie częściej do mniejszych odchyżeń niż zastosowanie podejścia opartego na duracji (jasny obszar zajmuje większą część wykresu). Warto zwrócić uwagę również na podsumowanie wyników takich jak maksymalne odchylenie *in plus*, maksymalne odchylenie *in minus* czy średnie odchylenie (obliczone jako średnia z 3721 kombinacji wieku) zaprezentowane w poniższej tabeli.

Tabela 2: Podsumowanie wrażliwości portfeli dla metody analitycznej i podejścia opartego na duracji na zmiany tablic trwania życia dla kobiet

	Metoda analityczna	Podejście oparte na duracji
Maksymalne odchylenie <i>in minus</i>	-10,35%	-6,23%
Maksymalne odchylenie <i>in plus</i>	1,79%	4,47%
Średnie odchylenie	2,35%	2,83%
Liczba przypadków gdy metoda daje lepszy wynik	2 585	1 136

Wprawdzie maksymalne odchylenie *in minus* jest wyższe w przypadku zastosowania metody analitycznej, jednak średnie odchylenie jest niższe (2,35% w porównaniu z 2,83%), ponadto dla 2 585 kombinacji wieku ubezpieczonych (co stanowi 69,5% wszystkich rozpatrywanych kombinacji) metoda analityczna prowadziła do niższej wartości bezwzględnej odchylenia (czyli do lepszego wyniku) niż podejście oparte na duracji.

Lepsze zabezpieczenie osiągnięte przy zastosowaniu metody analitycznej wynika po części z przyjęcia założenia o multiplikatywnym charakterze zmian intensywności umieralności w przeciwieństwie do podejścia opartego na duracji zakładającego addytywny charakter zmian. Poniższa tabela pokazuje, że dla różnych grup wiekowych względne zmiany

intensywności umieralności pomiędzy rokiem 1990 a 2016 są zbliżone, podczas gdy absolutne zmiany wyraźnie rosną wraz z wiekiem

Tabela 3: Względne i absolutne zmiany intensywności umieralności w latach 1990-2016 w zależności od wieku dla mężczyzn i kobiet

Wiek	Względna zmiana intensywności umieralności		Absolutna zmiana intensywności umieralności	
	Mężczyźni	Kobiety	Mężczyźni	Kobiety
0	-79%	-79%	-0,0174	-0,0136
10	-63%	-73%	-0,0002	-0,0002
20	-48%	-42%	-0,0007	-0,0002
30	-48%	-48%	-0,0011	-0,0003
40	-50%	-53%	-0,0025	-0,0010
50	-43%	-39%	-0,0050	-0,0016
60	-36%	-35%	-0,0095	-0,0036
70	-37%	-45%	-0,0197	-0,0127
80	-40%	-47%	-0,0503	-0,0397
90	-37%	-38%	-0,1013	-0,0880
100	-37%	-36%	-0,2212	-0,2028

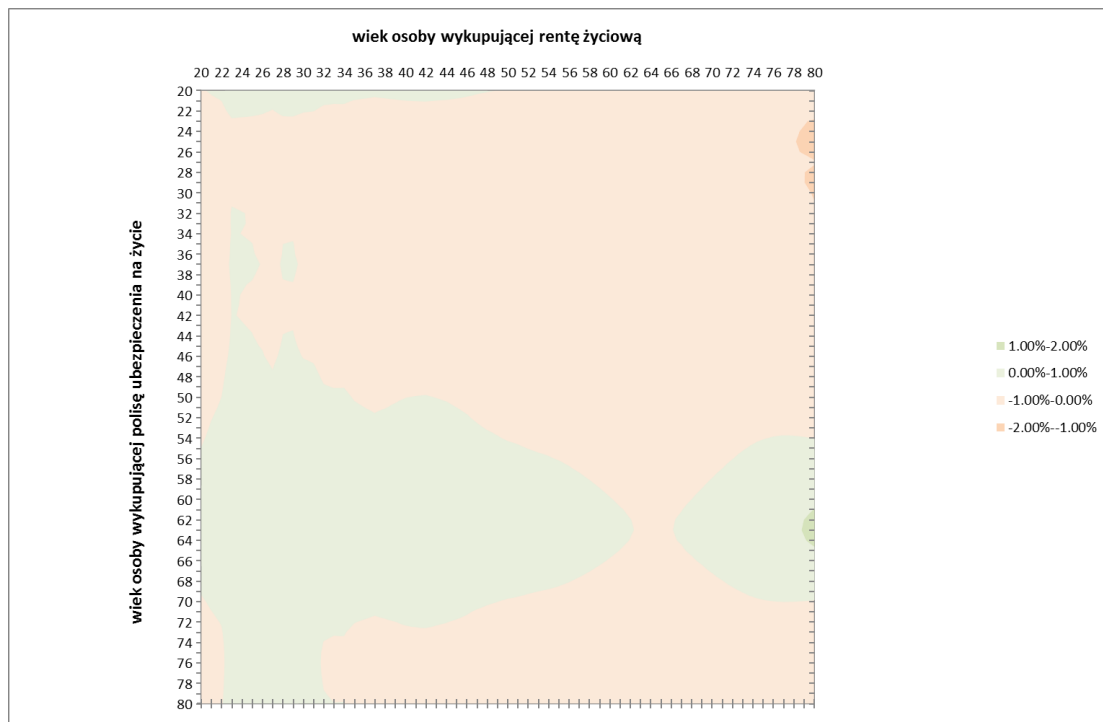
Otrzymane wyniki potwierdzają hipotezę, że metoda analityczna daje lepszą jakość zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności niż podejście oparte na duracji.

Porównanie jakości zabezpieczenia metody analitycznej i modeli prognozujących przyszłą śmiertelność

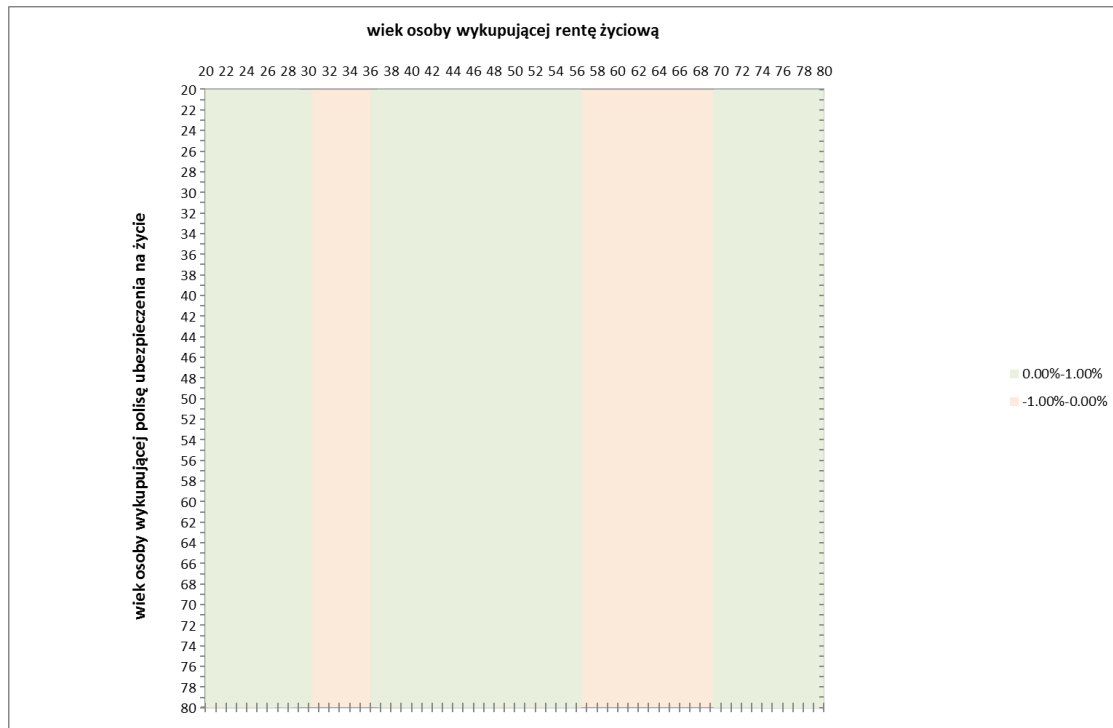
Drugi model symulacyjny miał za zadanie porównać jakość zabezpieczenia otrzymaną przy użyciu metody analitycznej z jakością zabezpieczenia uzyskaną dzięki zastosowaniu modeli prognozujących przyszłą śmiertelność (LC i CBD). W pierwszym przypadku zakład ubezpieczeń dokonuje obliczenia optymalnej struktury portfela w oparciu o tablice trwania życia dla Polski z roku 2009 i sprzedaje polisy ubezpieczenia na życie oraz polisy rentowe zgodnie z wyznaczoną strukturą. Podobnie jak w pierwszym modelu rozważono 3721 możliwych kombinacji wieku ubezpieczonych oddzielnie dla mężczyzn i kobiet. Jednorazowa składka ubezpieczeniowa została skalkulowana w oparciu o tablice z roku 2009. W drugim i trzecim przypadku zakład sprzedaje tylko polisy rentowe, zaś składka ubezpieczeniowa została obliczona w oparciu o dynamiczne tablice trwania życia oszacowane za pomocą modelu LC (przypadek drugi) lub CBD (przypadek trzeci). Parametry tych modeli zostały oszacowane na podstawie historycznych danych o tablicach śmiertelności w latach 1990-2009. Polisy są sprzedawane na okres 7 lat (od 1 stycznia 2010 roku do 31 grudnia 2016 roku). Symulacja pozwalała więc na bezpośrednie porównanie trzech sposobów zabezpieczenia przed ryzykiem

długowieczności (optymalizacja struktury portfela, wykorzystanie modelu LC oraz wykorzystanie modelu CBD) na tle historycznych zmian śmiertelności w Polsce oraz pozwalała porównać konsekwencje finansowe dla zakładu ubezpieczeń zastosowania każdej z tych metod. Dla każdej kombinacji wieku ubezpieczonych, oddzielnie w przypadku, gdy ubezpieczonymi są mężczyźni i kobiety, obliczono odchylenie wartości bieżącej łącznych wypłat z tytułu świadczeń (wyznaczonej przy użyciu historycznych tablic trwania życia) od zakładanej aktuarialnej wartości bieżącej wypłat uwzględnionej przy kalkulacji składki ubezpieczeniowej. Podsumowanie wyników dla kobiet (wyniki dla mężczyzn pominięto ze względu na analogiczny charakter) zawierają poniższe wykresy. Z uwagi na fakt, że w przypadku drugim i trzecim zakład sprzedaje jedynie polisy rentowe, wyniki nie są zależne od wieku osoby wykupującej ubezpieczenie na życie, przedstawiono je jednak przy zastosowaniu dwóch wymiarów w celu zachowania spójności z pozostałymi wykresami.

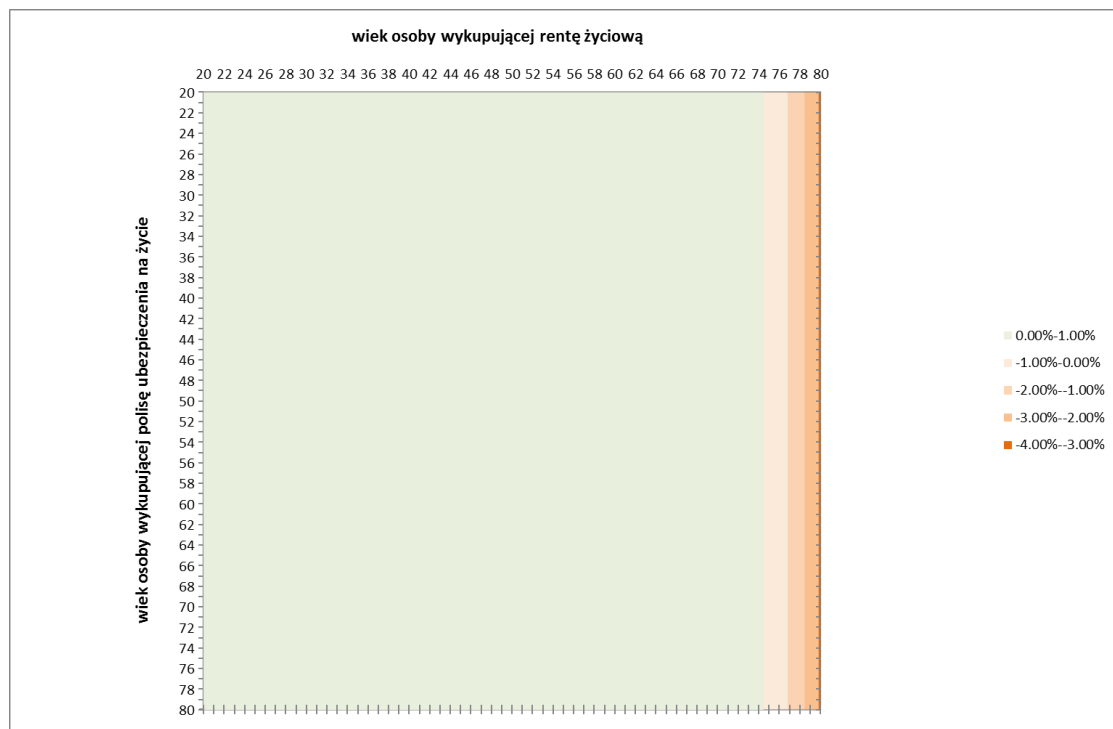
Rysunek 3. Wrażliwość wartości portfela ubezpieczeniowego na zmiany śmiertelności przy zachowaniu optymalnej struktury portfela wyznaczonej za pomocą metody analitycznej dla kobiet w zależności od wieku



Rysunek 4. Wrażliwość wartości portfela rentowego na zmiany śmiertelności przy wykorzystaniu dynamicznych tablic trwania życia oszacowanych za pomocą modelu Lee-Cartera dla kobiet w zależności od wieku



Rysunek 5. Wrażliwość wartości portfela rentowego na zmiany śmiertelności przy wykorzystaniu dynamicznych tablic trwania życia oszacowanych za pomocą modelu CBD dla kobiet w zależności od wieku



Analiza wykresów wskazuje na dobrą jakość zabezpieczenia w przypadku metody analitycznej i modelu LC (brak obszaru ciemnego). Model CBD daje dobre wyniki za

wyjątkiem sytuacji gdy wiek kobiety wykupującej rentę życiową jest bliski 80 lat. Dokładniejsze wyniki, podobnie jak w poprzednim modelu, zostały przedstawione w poniższych tabelach (w pierwszej tabeli zawarto wyniki analizy wszystkich 3 721 kombinacji wieku ubezpieczonych, w drugiej zaś ograniczono się tylko do najbardziej reprezentatywnych przypadków, w których wiek osoby dokonującej zakupu polisy ubezpieczenia na życie zawiera się w przedziale od 30 do 60 lat, zaś wiek osoby wykupującej rentę życiową w przedziale od 50 do 80 lat (łącznie 961 kombinacji).

Tabela 4: Podsumowanie wrażliwości portfeli na zmiany tablic trwania życia w analizowanych trzech przypadkach dla kobiet

	Optymalna struktura	Model Lee-Cartera	Model CBD
Maksymalne odchylenie <i>in minus</i>	-1,21%	-0,25%	-3,14%
Maksymalne odchylenie <i>in plus</i>	1,10%	0,93%	0,65%
Średnie odchylenie	0,268%	0,273%	0,62%
Liczba przypadków gdy metoda daje najlepszy wynik	1 679	1 574	468

Tabela 5: Podsumowanie wrażliwości portfeli na zmiany tablic trwania życia w analizowanych trzech przypadkach dla kobiet (przy ograniczeniu do kombinacji w których wiek osoby dokonującej zakupu polisy ubezpieczenia na życie zawiera się w przedziale od 30 do 60 lat zaś wiek osoby wykupującej rentę życiową zawiera się w przedziale od 50 do 80 lat)

	Optymalna struktura	Model Lee-Cartera	Model CBD
Maksymalne odchylenie <i>in minus</i>	-1,04%	-0,25%	-3,14%
Maksymalne odchylenie <i>in plus</i>	0,89%	0,93%	0,65%
Średnie odchylenie	0,377%	0,381%	0,86%
Liczba przypadków gdy metoda daje najlepszy wynik	326	396	239

Wyniki wskazują na porównywalną jakość zabezpieczenia uzyskanego za pomocą optymalizacji struktury portfela przy użyciu metody analitycznej oraz za pomocą modelu LC. W obu tabelach średnie odchylenie dla obu metod jest zbliżone, zaś liczba kombinacji wieku, dla których określona metoda daje lepszy efekt zabezpieczenia jest nieco wyższa dla metody analitycznej, gdy pod uwagę brana jest cała próba, oraz wyższa dla modelu LC po ograniczeniu się do bardziej reprezentatywnych kombinacji wieku. Na tle tych dwóch metod zdecydowanie najgorsze wyniki przynosi zastosowanie modelu CBD. Przeprowadzone analizy potwierdzają więc hipotezę badawczą, że jakość zabezpieczenia uzyskanego za pomocą optymalizacji struktury portfela jest porównywalna z jakością otrzymaną dzięki użyciu modeli prognozujących przyszłą śmiertelność.

Praktyczne możliwości zastosowania otrzymanych wyników

Uzyskane wyniki pokazują, że metoda analityczna jest dobrym sposobem zabezpieczającym przed ryzykiem długowieczności, a jej jakość jest porównywalna z powszechnie stosowanymi modelami prognostycznymi. Pozostaje jednak problem, że mimo iż częściowe zabezpieczenie za pomocą metody analitycznej może występować samoistnie w portfelach ubezpieczeniowych składających się z rent życiowych i ubezpieczeń na życie, to jednak nie da się łatwo zmienić struktury portfela ubezpieczeniowego tak, aby była ona równa strukturze wyznaczonej na podstawie optymalizacji w celu uzyskania pełnego zabezpieczenia. Ze względu na ten problem zastosowanie naturalnej immunizacji pozostaje ograniczone w praktyce ubezpieczeniowej, niemniej jednak można wskazać kilka obszarów w których nawet częściowe zabezpieczenie może przynosić korzyści dla zakładu.

Pierwszym obszarem praktycznego zastosowania naturalnej immunizacji jest taryfikacja produktów. Oczywiście, jeżeli optymalna struktura portfela oszacowana na podstawie zaprezentowanego modelu wynosi np. 75% ubezpieczeń na życie oraz 25% rent życiowych (w ujęciu liczbowym) nie oznacza to, że zakład ubezpieczeń jest w stanie w krótkim czasie dostosować swoją strukturę produktów do optymalnego poziomu. Jest jednak w stanie oszacować swoją ekspozycję na ryzyko, np. jeżeli w portfelu znajduje się więcej rent życiowych i mniej ubezpieczeń na życie niż wynika to z optymalnej struktury to spadek śmiertelności w populacji ubezpieczonych będzie prowadził do strat zakładu, w przeciwnym przypadku do zysków. Mając tę wiedzę zakład może oszacować ile kosztuje go dodatkowe zabezpieczenie przed ryzykiem długowieczności (za pomocą dodatkowych instrumentów finansowych lub po prostu utrzymywania dodatkowego kapitału na ryzyko) i uwzględnić tę wiedzę w taryfikacji produktów. Np. w przypadku, gdy w portfelu znajduje się stosunkowo niewiele polis ubezpieczenia na życie zakład może obniżyć składki tak, aby zwiększyć popyt na te ubezpieczenia. Wówczas strata zakładu wynikająca z obniżenia składek może być przewyższona przez zysk wynikający ze zwiększonego zabezpieczenia portfela przed ryzykiem długowieczności.

Drugim obszarem praktycznego zastosowania naturalnej immunizacji jest szacowanie jaka część portfela jest niezabezpieczona i jakie w związku z tym są potrzeby dodatkowego zabezpieczenia np. za pomocą instrumentów finansowych. Zazwyczaj w portfelu zakładów ubezpieczeń na życie aktywnych na rynku rentowym udział polis ubezpieczeń na życie jest niewystarczający do zabezpieczenia całego portfela rentowego przed ryzykiem długowieczności. Nie można wówczas mówić o czerpaniu korzyści z pełnego zabezpieczenia

portfela na skutek naturalnej immunizacji. Niemniej jednak zabezpieczenie, przynajmniej częściowe, występuje. W przypadku, gdy w portfelu zakładu ubezpieczeń znajduje się stosunkowo niewiele polis ubezpieczenia na życie, zakład ubezpieczeń jest w stanie oszacować jaka część portfela rent życiowych jest przez nie zabezpieczona. Oznacza to, że faktyczna ekspozycja zakładu na ryzyko długowieczności jest mniejsza, niż wynikałoby to z analizy całego portfela rent życiowych. Zakład może wykorzystać tę informację w przypadku zakupu dodatkowego zabezpieczenia za pomocą instrumentów finansowych (takich jak obligacje czy swapy długowieczności). Ponieważ dodatkowe zabezpieczenie będzie dotyczyło tylko części portfela (tej, która nie jest zabezpieczona za pomocą polis ubezpieczenia na życie) będzie ono tańsze niż w ogólnym przypadku zabezpieczenia całego portfela.

Wreszcie analiza naturalnej immunizacji portfela ubezpieczeniowego może znaleźć zastosowanie w zarządzaniu ryzykiem zakładu ubezpieczeń, jako że ryzyko długowieczności jest jego nieodzownym elementem. Oczywistym obszarem jej zastosowania może być kalkulacja kapitałowego wymogu wypłacalności w systemie Solvency II za pomocą modelu wewnętrznego. Informacja o tym, że na skutek naturalnej immunizacji część portfela zakładu ubezpieczeń jest zabezpieczona przed zmianami śmiertelności, może zostać uwzględniona przy wyznaczaniu wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka śmiertelności i długowieczności. Jako że częściowe zabezpieczenie portfela zmniejsza ekspozycję na ryzyko długowieczności, prowadzi to do obniżenia wymogu kapitałowego, co z kolei przekłada się na konkretny zysk zakładu ubezpieczeń. Ponadto wiedza o częściowym zabezpieczeniu portfela może być wykorzystywana w innych obszarach zarządzania ryzykiem, np. przy okazji analiz apetytu na ryzyko. Im większa część portfela podlega immunizacji, tym więcej nowych polis zakład może wystawić, aby wciąż mieścić się w ramach zakładanego apetytu na ryzyko. To z kolei prowadzi do zwiększenia udziału w rynku i również do zwiększenia zysku zakładu (przy założeniu, że nowe polisy są zyskowne).

Podsumowanie

Odnosząc się do hipotez badawczych, postawionych we wstępie można stwierdzić, że:

- Przedstawione zostały dowody, ukazujące korzyści z zastosowania naturalnej immunizacji portfela ubezpieczeniowego, jak również przykłady praktycznych zastosowań immunizacji w działalności zakładów ubezpieczeń. Zabezpieczenie przed ryzykiem długowieczności za pomocą optymalizacji struktury portfela ubezpieczeniowego istotnie ma miejsce.

- Metoda analityczna, zaproponowana w rozprawie doktorskiej, daje lepsze zabezpieczenie w porównaniu z podejściem opartym na duracji, co wynika z przyjęcia bardziej realistycznych założeń i co zostało potwierdzone analizą zmian tablic trwania życia dla Polski publikowanych przez GUS w latach 1990-2016.
- Efekt zabezpieczenia, uzyskany za pomocą optymalizacji struktury portfela ubezpieczeniowego przy użyciu metody analitycznej, jest porównywalny z efektem zabezpieczenia osiąganym poprzez wykorzystanie dynamicznych tablic trwania życia oszacowanych na podstawie modelu Lee-Cartera i lepszy niż w przypadku zastosowania modelu CBD.

Podsumowując, w rozprawie doktorskiej zaprezentowano nową metodę optymalizacji struktury portfela ubezpieczeniowego, która – jak pokazały analizy na danych polskich – przynosi dobrą jakość zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności i może być, choćby częściowo, wykorzystywana w praktycznej działalności ubezpieczeniowej.

Bibliografia

- Adamska-Mieruszewska, J. (2013), „Znaczenie ryzyka długowieczności dla stabilności systemów emerytalnych”, *Zarządzanie i Finanse*, R. 11, nr 2, cz. 5, 5-16
- Alho, J. (2000), „Discussion of Lee”, *North American Actuarial Journal*, 4, 91-93.
- Bartkowiak M. (2011), „Transfer Ryzyka Długowieczności”, *Polityka społeczna*, nr 3 (tematyczny) „Problemy zabezpieczenia emerytalnego w Polsce i na świecie”, cz. 2, 2-24.
- Bijak, J. i B. Więckowska (2008), „Model Lee i Cartera a wysokość świadczeń dożywczych – wyniki dla Polski”, prezentacja na Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej „Zagadnienia Aktuarialne – Teoria i praktyka”, Warszawa, 9-11 czerwca 2008, <http://coin.wne.uw.edu.pl/ka2008/prezentacje/Bijak,%20Wieckowska.pdf>.
- Bijak W. (2009), *Praktyczne metody badania niewypłacalności zakładów ubezpieczeń*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Blake, D. i W. Burrows (2001), “Survivor Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk”, *Journal of Risk and Insurance*, 68, 339-348.
- Blake, D., A. J. G. Cairns, G. D. Coughlan, K. Dowd i R. MacMinn (2013), “The new life market”, *Journal of Risk and Insurance*, 80, 501-558.
- Blake, D., A. J. G. Cairns i K. Dowd (2006), “Living with Mortality: Longevity Bonds and Other Mortality-Linked Securities”, *British Actuarial Journal*, 12, 153-197.
- Blake, D., A. J. G. Cairns, K. Dowd i R. MacMinn (2006), “Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation, and Hedging”, *Journal of Risk and Insurance*, 73, 647-672.
- Blake, D., N. El Karoui, S. Loisel i R. MacMinn (2017), „Longevity Risk and Capital Markets: The 2015-16 Update”, *Insurance: Mathematics and Economics*, <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.10.002>.
- Blake, D. i M. Morales (2017), “Longevity Risk and Capital Markets: The 2014-15 Update”, *Journal of Risk and Insurance*, 84, 279-297.
- Bowers, N (1997), *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.
- Brouhns, N., M. Denuit i J. Vemunt (2002), “A Poisson Log-bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 373-393.
- Cairns, A. J. G., D. Blake i K. Dowd (2006), “A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration”, *Journal of Risk and Insurance*, 73, 687-718.
- Cox, S. H. i Y. Lin (2007), “Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks”, *North American Actuarial Journal*, 11, 1-15.
- Cox, S. H. i Y. Lin (2008), “Securitization of Catastrophe Mortality Risks”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 628-637
- Dędyś M. i S. Dorosiewicz (2005), *Procesy stochastyczne?*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Dowd, K., D. Blake, A. J. G. Cairns i P. Dawson (2006), “Survivor Swaps”, *Journal of Risk and Insurance*, 73, 1-17.
- Dubnicki W., J. Kłopotowski i T. Szapiro (1996), *Analiza matematyczna: Podręcznik dla ekonomistów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Fortuna Z., B. Macukow i J. Wąsowski (1998), *Metody numeryczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Frątczak E. (red.) (2009), *Wielowymiarowa analiza statystyczna: Teoria – przykłady zastosowań z systemem SAS*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Gajek, L., K. Ostaszewski i H. J. Zwiesler (2005), „A Primer on Duration, Convexity, and Immunization”, *Journal of Actuarial Practice*, 12, 59-82.
- Gao, Q. i C. Hu (2009), “Dynamic Mortality Factor Model with Conditional Heteroskedasticity”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 45, 410-423.
- Gerber, H. U. (1997), *Life Insurance Mathematics*, Springer, Heidelberg.

- Girosi, F. i G. King (2007), "Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method", <http://gking.harvard.edu/gking/files/lc.pdf>.
- Hainaut, D. (2012), "Multidimensional Lee-Carter model with switching mortality processes", *Insurance: Mathematics and Economics*, 50, 236-246.
- Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Human Mortality Database, 2013. Dane dostępne na stronie <http://www.mortality.org>.
- Institute and Faculty of Actuaries, Life & Longevity Markets Association, *Longevity Basis Risk: A methodology for assessing basis risk*, raport dostępny pod adresem <https://www.google.be/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjzfuIuIzXAhWdNhoKHaTeBPAQFggmMAA&url=https%3A%2F%2Fwww.actuaries.org.uk%2Flearn-and-develop%2Fresearch-and-knowledge%2Factuarial-research-centre-arc%2Fcommissioned-projects%2Flongevity-basis-risk&usg=AOvVaw3q0dKgA6PmP64vWXJnAXcO>
- Kellison, S. G. (2009), *The Theory of Interest*, University of Central Florida
- Lee, R. D. i L. R. Carter (1992), "Modeling and Forecasting U.S. Mortality", *Journal of the American Statistical Association*, 87, 659-671.
- Lee, R. (2000), "The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications", *North American Actuarial Journal*, 4, 80-93.
- Luciano, E., L. Regis i E. Vigna (2012), "Delta-gamma Hedging of Mortality and Interest Rate Risk", *Insurance: Mathematics and Economics*, 50, 402-412.
- Morrison D. F. (1990), *Wielowymiarowa analiza statystyczna*, tł. Zieliński W., Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Papież, M. (2008), „Możliwość wykorzystania modelu Lee-Cartera do szacowania wartości w dynamicznych tablicach trwania życia”, *Zeszyt nr 18 Sekcji Analiz Demograficznych Komitetu Nauk Demograficznych PAN*, 55-71.
- Papież, M. (2010), „Zastosowanie stochastycznego modelu Cairnsa-Blake’a-Dowda do prognozowania oczekiwanej długości trwania życia”, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, 813, 45-68.
- Podgórska M. i J. Klimkowska (2013), *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa
- Renshaw, A. i S. Haberman (2003), "Lee-Carter Mortality Forecasting with Age-specific Enhancement", *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 255-272.
- Renshaw, A. i S. Haberman (2006), "A Cohort-based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors", *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 556-570.
- Rockafellar, R. T. i S. Uryasev (2002), "Conditional value-at-risk for general loss distributions", *Journal of Banking & Finance*, 26, 1443-1471.
- Rossa, A. (2009), „Dynamiczne tablice trwania życia oparte na metodologii Lee-Cartera i ich zastosowanie do obliczania wysokości świadczeń emerytalnych”, *Acta Universitatis Lodzianensis. Folia Oeconomica*, 231, 367-384.
- Rossa, A. (red.) (2011), *Analiza i modelowanie umieralności w ujęciu dynamicznym*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Skałba, M. (2003), *Ubezpieczenia na życie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Szczepański M. (2014), "Zarządzanie Ryzykiem Długowieczności w Polskim Systemie Emerytalnym", *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego*, nr 802, *Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia* nr 65, 731-744.
- Tsai, J. T., J. L. Wang i L. Y. Tzeng (2010), "On the Optimal Product Mix in Life Insurance Companies Using Conditional Value at Risk", *Insurance: Mathematics and Economics*, 46, 235-241.
- Turner, J. A., G. Hughes, A. Chłoń-Domińczak i D. M. Rajnes (2017), "Longevity insurance annuities: potential role in social insurance", *Journal of Insurance, Financial Markets and Consumer Protection*, 25, 3-21.
- Wall, M., A. Rechtsteiner i L. Rocha (2003), "Singular Value Decomposition and Principal Components Analysis" [w:] Berrar, D., W. Dubitzky i M. Granzow, "A practical approach to microarray data analysis", 91-109, Kluwer: Norwell, MA.

Wang, C. W., H. C. Huang i D. C. Hong (2013), "A Feasible Natural Hedging Strategy for Insurance Companies", *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 532-541.

Wang, J. L., L. Y. Yang i Y. C. Pan (2003), „Hedging Longevity Risk in Life Insurance Companies”, *Asia-Pacific Risk and Insurance Association*, 2003 Annual Meeting, za: Cox, S. H. i Y. Lin (2007), "Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks", *North American Actuarial Journal*, 11, 1-15.

Wang, J. L., H. C. Huang, S. S. Yang i J. T. Tsai (2010), "An Optimal Product Mix for Hedging Longevity Risk in Life Insurance Companies: The Immunization Theory Approach", *Journal of Risk and Insurance*, 77, 473-497.

Wilmoth, J. (1993), "Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change", Technical Report for the National Institute on Aging.

Arkadiusz Filip