

Dr Łukasz Delong

**Autoreferat przedstawiający opis
dorobku oraz osiągnięć naukowych**

Warszawa, 06.08.2012

Spis treści:

1. Informacje o wykształceniu i zatrudnieniu	3
2. Syntetyczna charakterystyka zainteresowań naukowych	3
3. Przebieg pracy naukowej	4
4. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki	6
5. Pozostałe publikacje naukowe oraz prace badawcze	21
6. Udział w międzynarodowych projektach badawczych	28
7. Nagrody, granty i stypendia związane z działalnością naukową	28
8. Referaty wygłoszone na zagranicznych konferencjach naukowych	30
9. Referaty wygłoszone na krajowych konferencjach naukowych	32

1. Informacje o wykształceniu i zatrudnieniu

W 1999 r. rozpocząłem studia w Szkole Głównej Handlowej w Warszawie. **W grudniu 2003 r. obroniłem pracę magisterską** „*Prawdopodobieństwo ruiny w procesie nadwyżki ubezpieczyciela ze stałą intensywnością oprocentowania*” oraz ukończyłem studia na kierunku Metody Ilościowe i Systemy Informacyjne z wynikiem celującym, **otrzymując tytuł magistra ekonomii.**

W 2007 r. otworzyłem przewód doktorski w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk. Promotorem był prof. dr hab. Łukasz Stettner (IMPAN). **We wrześniu 2007 r. obroniłem rozprawę doktorską** „*Optimal investment strategies in financial markets driven by a Lévy process, with applications to insurance*” i **otrzymałem stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki.** Recenzentami byli prof. dr hab. Aleksander Weron i prof. dr hab. Leszek Słomiński. Moja rozprawa doktorska została uznana przez Radę Naukową Instytutu Matematycznego za wyróżniającą się oraz została uhonorowana wieloma innymi nagrodami, m.in. Nagrodą Prezesa Rady Ministrów oraz Nagrodą Fundacji PZU.

Pracę dydaktyczną w SGH rozpocząłem we wrześniu 2002 r., będąc studentem IV roku. Przez półtora roku odbywałem staż asystencki w Instytucie Ekonometrii SGH. **W marcu 2004 r. zostałem zatrudniony na stanowisku asystenta w Zakładzie Metod Probabilistycznych Instytutu Ekonometrii SGH, następnie w grudniu 2007 r. otrzymałem awans na stanowisko adiunkta.**

Chciałbym także poinformować, że w okresie od grudnia 2007 r. do stycznia 2009 r. pracowałem na stanowisku aktuariusza w Biurze Zarządzania Produktami w PZU Życie S.A.

2. Syntetyczna charakterystyka zainteresowań naukowych

Moje zainteresowania naukowe obejmują metody modelowania i sterowania stochastycznego oraz ich zastosowania w ubezpieczeniach i finansach.

Głównym przedmiotem moich badań naukowych jest konstrukcja portfeli inwestycyjnych/portfeli zabezpieczających dla zakładów ubezpieczeń i inwestorów oraz wycena kontraktów ubezpieczeniowych i finansowych. Rozważam dynamiczne problemy optymalizacyjne w modelach aktuarialnych i finansowych, do rozwiązania których wykorzystuję teorię sterowania stochastycznego. Posługuję się metodami analizy stochastycznej, równaniami Hamiltona-Jacobiego-Bellmana oraz wstecznymi stochastycznymi równaniami różniczkowymi. Rozwiązując problemy optymalizacyjne,

staram się rozwijać zastosowania teorii sterowania stochastycznego w naukach aktuarialnych i finansach.

Motywacja do moich badań pochodzi ze świata ubezpieczeń i finansów. Celem badań jest wyznaczenie strategii inwestycyjnych, które mogą pomóc firmom ubezpieczeniowym i bankom w lepszej ocenie ryzyka i zabezpieczeniu się przed nim. Moje wyniki będą pomocne przy wycenie złożonych ryzyk finansowych i ubezpieczeniowych, przy ustaleniu strategii zarządzania aktywami oraz przy wdrażaniu modeli wewnętrznej oceny ryzyka, które są nieodłącznym elementem europejskich projektów Basel III i Solvency II.

Oprócz ustawicznego dokształcania z zakresu matematyki aktuarialnej i finansowej, analizy stochastycznej oraz teorii sterowania stochastycznego, poszerzam także swoje wiadomości z zakresu praktyki aktuarialnej. Wielokrotnie brałem udział jako słuchacz w Letniej Szkole Nauk Aktuarialnych organizowanej przez Uniwersytet Warszawski, letniej szkole organizowanej przez Szwajcarskie Stowarzyszenie Aktuarialne oraz w kursach European Actuarial Academy. Chciałbym podkreślić, że wiedza praktyczna odegrała istotną rolę w mojej pracy naukowej, służąc jako źródło i motywacja do wprowadzenia modelu i postawienia problemu optymalizacyjnego.

3. Przebieg pracy naukowej

Okres studiów

Moje zainteresowania naukami aktuarialnymi rozpoczęły się na III roku studiów SGH. Pod koniec III roku podjąłem decyzję o odbyciu stażu asystenckiego w Instytucie Ekonometrii SGH. Będąc studentem IV roku zdobywałem pierwsze doświadczenia dydaktyczne oraz poszerzałem swoją wiedzę z rachunku prawdopodobieństwa, statystyki i matematyki ubezpieczeniowej. Wynikiem pracy w tamtym okresie czasu była praca magisterska oraz zdany egzamin aktuarialny. W grudniu 2003 r. zostałem wpisany na listę aktuariuszy pod numerem 130.

Okres pracy nad rozprawą doktorską

W 2004 r., po rozpoczęciu pracy w Zakładzie Metod Probabilistycznych w Instytucie Ekonometrii SGH, zacząłem rozważać możliwe tematy rozprawy doktorskiej. Przeglądając artykuły naukowe zainteresowałem się matematyką finansową, modelami stochastycznymi,

problemami optymalizacyjnymi i metodami sterowania stochastycznego. Okazało się, że jednym z bardzo ważnych nurtów badawczych w naukach aktuarialnych jest poszukiwanie optymalnych strategii inwestycyjnych dla firm ubezpieczeniowych. Taki kierunek badań łączył **trzy obszary moich zainteresowań naukowych: modelowanie aktuarialne, modelowanie finansowe i sterowanie stochastyczne**. Zacząłem poszerzać swoją wiedzę z matematyki aktuarialnej i zdobywać nową wiedzę z matematyki finansowej, analizy stochastycznej i teorii optymalnego sterowania. We wrześniu 2004 r. poprosiłem prof. dr. hab. Łukasza Stettnera o pełnienie funkcji promotora. Prof. Stettner zasugerował, że powinienem nauczyć się procesów Lévy'ego i zastosować je w swoich badaniach naukowych. Sugestia ta była bardzo trafna, ponieważ przygotowując rozprawę doktorską mogłem wykorzystać oraz pogłębić wiedzę na temat procesów skokowych, którą zdobyłem podczas przygotowań do egzaminów aktuarialnych, w kontekście problemów finansowych

Pod koniec 2004 r. napisałem pierwszy artykuł nt. wyznaczenia optymalnej strategii inwestycyjnej dla firmy ubezpieczeniowej, który ukazał się w *Applicationes Mathematicae* w 2005 r. **W latach 2004-2007 moje badania naukowe związane były z wyznaczaniem optymalnych strategii zabezpieczających w modelach aktuarialnych i finansowych, w których ważną rolę pełnił proces Lévy'ego**. Znajomość teorii procesów Lévy'ego z jednej strony pozwoliła mi uwzględnić wypłaty ubezpieczeniowe pojawiające się w losowych momentach czasu, z drugiej strony mogłem wprowadzić nagłe skoki do dynamiki ceny akcji. **Rozwiązując problemy optymalizacyjne wykorzystywałem równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana**. We wrześniu 2007 r., na podstawie przedstawionej rozprawy, otrzymałem stopień doktora nauk matematycznych.

Okres pracy po otrzymaniu stopnia doktora

W 2008 r. dostałem pracę do recenzji, w której autorzy wyznaczyli optymalną strategię inwestycyjną wykorzystując wsteczne stochastyczne równania różniczkowe – równanie BSDE (*Backward Stochastic Differential Equation*). Recenzując pracę zdałem sobie sprawę, że pewne ważne aktuarialne i finansowe problemy optymalizacyjne, których na etapie przygotowywania rozprawy doktorskiej nie potrafiłem rozwiązać stosując równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana, mógłbym rozwiązać wykorzystując wsteczne stochastyczne równania różniczkowe. Rozpoczął się nowy etap w moich badaniach naukowych. Opanowałem techniki związane z wstecznymi stochastycznymi równaniami różniczkowymi. W lutym 2009 r. rozpocząłem trzy miesięczny pobyt w Berlinie i współpracę z prof. Peterem

Imkellerem. Jak wiadomo, prof. P. Imkeller jest autorytetem w zakresie wstecznych stochastycznych równań różniczkowych. W szczególności, za pomocą wstecznych stochastycznych równań różniczkowych jako pierwszy wyznaczył optymalną strategię inwestycyjną dla inwestora, który maksymalizuje oczekiwaną użyteczność z kapitału¹. W latach 2008-2012 rozwiązywałem nowe problemy wyceny i zabezpieczenia wypłat uwzględniając zależności, które występują w rzeczywistości pomiędzy czynnikami ryzyka ubezpieczeniowego i finansowego. W pracach z tego okresu wykorzystywałem wsteczne stochastyczne równania różniczkowe do wyznaczenia optymalnych strategii inwestycyjnych i konstrukcji operatorów wyceny. Udało mi się rozwinąć aparat matematyczny związany z analizą stochastyczną, ruchem Browna i procesami skokowymi (miarami losowymi) do tego stopnia, że byłem w stanie rozważać bardzo ogólne, tym samym bliższe rzeczywistości, modele aktuarialne i finansowe oraz różnorodne profile wypłat i dynamiki czynników ryzyka.

4. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

Jako osiągnięcie naukowe chciałbym wskazać jednotematyczny cykl publikacji nt. **Wykorzystanie wstecznych stochastycznych równań różniczkowych w ubezpieczeniach i finansach:**

1. Ł. Delong (2012) Applications of time-delayed backward stochastic differential equations to pricing, hedging and portfolio management, *Applicationes Mathematicae* 39, praca w druku, potwierdzenie w załączeniu (MNiSW=9p.),
2. Ł. Delong (2012) BSDEs with time-delayed generators of a moving average type with applications to non-monotone preferences, *Stochastic Models* 28, 281-315 (IF=0,667; MNiSW=27p.),

¹ Hu, Y., Imkeller, P., Muller, M. (2005) Utility maximization in incomplete markets, *The Annals of Applied Probability* 15, 1691-1712.

3. Ł. Delong (2012) No-good-deal, local mean-variance and ambiguity risk pricing and hedging for an insurance payment processes, *ASTIN Bulletin* 42, 203-232 (IF=0,486; MNiSW=27p.),
4. Ł. Delong (2012) Exponential utility maximization, pricing and hedging for a payment process, *Applicationes Mathematicae* 39, 211-229 (MNiSW=9p.),
5. Ł. Delong (2010) An optimal investment strategy for a stream of liabilities generated by a step process in a financial market driven a Lévy process, *Insurance: Mathematics and Economics* 47, 278-293 (IF=1,178; MNiSW=32p.),
6. Ł. Delong, P. Imkeller (2010) On Malliavin's differentiability of BSDEs with time delay generators driven by Brownian motions and Poisson random measures, *Stochastic Processes and their Applications* 120, 1748-1775 (IF=0,951; MNiSW=27p.; mój udział=70%, potwierdzenie w załączeniu),
7. Ł. Delong, P. Imkeller (2010) Backward stochastic differential equations with time delayed generators - results and counterexamples, *The Annals of Applied Probability* 20, 1512-1536 (IF=1,12; MNiSW=32p.; mój udział=70%, potwierdzenie w załączeniu).

Praca [1] zostanie opublikowana w specjalnym numerze *Applicationes Mathematicae*, który w całości będzie poświęcony matematyce finansowej i ubezpieczeniowej.

Równania BSDE z opóźnieniem – podstawy teoretyczne i rezultaty przydatne dla zastosowań

W lutym 2009 r. rozpocząłem trzy miesięczną wizytę na Uniwersytecie Humboldta w Berlinie i współpracę z Prof. Peterem Imkellerem. Efektem tej współpracy były publikacje [6] i [7] wprowadzające do literatury nową klasę wstecznych stochastycznych równań różniczkowych - równania BSDE z opóźnieniem.

Pojęcie równania BSDE (*Backward Stochastic Differential Equation*) pojawiło się po raz pierwszy w pracy Bismuta², który starał się rozwiązać pewien problem optymalizacyjny wykorzystując zasadę maksimum Pontriagina. Ogólna teoria równań BSDE została

² Bismut, J.M. (1973) Conjugate convex functions in optimal stochastic control, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 44, 384-404.

sformułowana przez Pardoux i Penga w 1990 r.³. W ciągu ostatnich 20 lat równania BSDE stały się głównym narzędziem matematycznym wykorzystywanym w teorii sterowania stochastycznego do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych. Ponieważ wiele problemów w finansach i ubezpieczeniach to problemy optymalizacyjne, równania BSDE pojawiły się także w matematyce finansowej i ubezpieczeniowej. Pierwsze zastosowania równań BSDE w matematyce finansowej zostały omówione w połowie lat 90 XX wieku. Obecnie równania BSDE stanowią jeden z najaktywniejszych obszarów badań w matematyce finansowej w związku z rozwojem zaawansowanych metod stochastycznych w finansach.

Równanie BSDE jest to równanie postaci

$$Y(t) = \xi + \int_t^T f(s, Y(s), Z(s))ds - \int_t^T Z(s)dW(s), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

gdzie ξ jest zmienną losową definiującą wartość końcową procesu Y w chwili T , f jest tzw. generatorem równania i W jest ruchem Browna. Mając daną zmienną losową ξ oraz postać generatora f staramy się znaleźć parę (Y, Z) , która spełnia równanie (1). Równania BSDE są obecnie wykorzystywane do scharakteryzowania optymalnych funkcji wartości i optymalnych strategii w stochastycznych problemach optymalizacyjnych oraz do zdefiniowania nieliniowych wartości oczekiwanych (*g-expectations*), dynamicznych miar ryzyka i dynamicznych preferencji (*recursive stochastic utilities*) w teorii użyteczności.

Równaniem BSDE z opóźnieniem nazwalismy w pracach [6]-[7] równanie postaci

$$Y(t) = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z(s)dW(s), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

gdzie $Y_s = (Y(u), 0 \leq u \leq s)$, $Z_s = (Z(u), 0 \leq u \leq s)$. W porównaniu z generatorem równania BSDE (1), generator równania BSDE z opóźnieniem (2) zależy od wartości rozwiązania w poprzednich okresach czasu. Motywacją do analizy nowych równań typu (2) był problem finansowy związany z optymalną sprzedażą akcji przez „dużego” inwestora. Niestety, postawionego problemu finansowego nie udało się nam rozwiązać. Udało się natomiast stworzyć podstawy teoretyczne dla nowej klasy równań BSDE.

W pracy [7] zostały omówione podstawowe własności rozwiązań równań BSDE z opóźnieniem. Udowodnione zostały trzy różne wersje twierdzeń o istnieniu dokładnie jednego rozwiązania (Theorem 2.1, 2.2, 2.3), twierdzenie porównawcze (Theorem 5.1) oraz

³ Pardoux, E., Peng, S. (1990) Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *Systems Control Letters* 14, 55-61.

twierdzenie o istnieniu *measure solution* (Theorem 5.2). Twierdzenia tego typu są kluczowe w teorii równań BSDE i w zastosowaniach. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania pozwala analizować równanie BSDE i wykorzystać je w modelowaniu. Twierdzenie porównawcze, z finansowego punktu widzenia, zapewnia, że cena zobowiązania, modelowana jako rozwiązanie równania BSDE, jest większa jeżeli zobowiązanie generuje większe szkody. Rozwiązania *measure solution* są także bardzo ważne w problemach wyceny arbitrażowej ponieważ pozwalają przedstawić rozwiązanie równania BSDE, cenę zobowiązania, w postaci wartości oczekiwanej warunku końcowego równania względem równoważnej miary probabilistycznej. Otrzymane w pracy [7] wyniki pokazały, że równanie BSDE z opóźnieniem (2) nie jest trywialnym rozszerzeniem równania BSDE (1). Udowodnione zostało, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania BSDE z opóźnieniem dla bliskiego horyzontu czasu lub dla bardzo szczególnej postaci opóźnienia w generatorze równania, oraz że twierdzenie porównawcze jest spełnione i *measure solution* istnieje na odpowiednio zdefiniowanym przedziale czasu. Podane zostały przykłady, które ilustrują, że równanie BSDE z opóźnieniem może mieć nieskończenie wiele rozwiązań lub może nie mieć rozwiązania (Rozdział 3), oraz że rozwiązania równania BSDE z opóźnieniem może nie spełniać twierdzenia porównawczego i nie posiadać *measure solution* (Example 5, 6). W rozdziale 4 szczegółowo zostały zbadane liniowe równania BSDE z opóźnieniem oraz zostały wyznaczone rozwiązania równań liniowych w postaci jawnej (Theorem 4.1, Corollary 4.1, 4.2). Rezultaty otrzymane w pracy [7], oprócz wartości matematycznej związanej z wprowadzeniem do literatury nowej klasy równań, są także użyteczne dla przyszłych zastosowań tych równań. Po pierwsze, w pracy [7] został położony nacisk na analizę kluczowych, z punktu widzenia zastosowań, własności rozwiązań tych nowych równań. Po drugie, liczne przykłady miały na celu wyrobić intuicję związaną z nową klasą równań. Po trzecie, zostały wypracowane metody rozwiązywania nowych równań. Wyniki z pracy [7] wykorzystałem jako podstawę teoretyczną do otrzymania strategii inwestycyjnych w problemach inwestycyjnych charakteryzujących się współzależnościami aktywów i pasywów w pracy [1] oraz do konstrukcji użyteczności uwzględniającej efekt rozczarowania w pracy [2].

W pracy [6] została zbadana różniczkowalność w sensie Malliavina rozwiązania równania BSDE z opóźnieniem. Udowodnione zostały pewne fakty związane z różniczkowalnością w sensie Malliavina dla procesu Lévy'ego (Rozdział 3). Rozważane było równanie BSDE z opóźnieniem związane z procesem Lévy'ego i udowodniona została

różniczkowalność rozwiązania w sensie Malliavina względem ruchu Browna i części skokowej procesu Lévy'ego (Theorem 4.1 i Corollary 4.1). Różniczkowalność w sensie Malliavina względem części skokowej procesu Lévy'ego nie była wcześniej rozpatrywana nawet dla rozwiązywania równania BSDE bez opóźnienia. Warto podkreślić, że rachunek Malliavina pełni ważną rolę przy konstrukcji strategii replikujących ponieważ strategię replikującą dla wypłaty można wyrazić jako pochodną Malliavina ceny tej wypłaty. W konsekwencji, otrzymane w pracy [6] wyniki nt. różniczkowalności w sensie Malliavina mogą być w przyszłości wykorzystane do scharakteryzowania i wyznaczenia strategii replikującej w problemach z opóźnieniem. Rachunek Malliavina jest także wykorzystywany do konstrukcji numerycznych algorytmów rozwiązywania równań BSDE. Wyniki z pracy [6] mogą okazać się pomocne także w tym obszarze.

Chciałbym dodać, że w literaturze pojawiły się kolejne prace badające własności rozwiązań równań BSDE z opóźnieniem.

Równania BSDE z opóźnieniem – wykorzystanie w problemach zarządzania portfelami inwestycyjnymi oraz w modelowaniu dynamicznych operatorów wyceny opartych na preferencjach

Prace [1]-[2] pokazują użyteczność nowej klasy równań - równań BSDE z opóźnieniem w modelowaniu finansowym i aktuarialnym.

W pracy [1] rozważane były problemy inwestycyjne, których cechą charakterystyczną jest współzależność aktywów i pasywów. W klasycznym problemie replikacji wypłata ξ jest egzogeniczną zmienną losową, która nie zależy od strategii inwestycyjnej Z i portfela replikującego Y . W niektórych produktach inwestycyjnych mamy jednak do czynienia z sytuacją, kiedy portfel inwestycyjny wpływa na końcową wartość wypłat. Wypłata ma wtedy postać $\xi(Y, Z)$. Taka sytuacja ma miejsce, gdy rozważamy wypłaty dla funduszy inwestycyjnych, które oparte są o stopy zwrotu funduszu w poprzednich okresach i posiadają gwarancje zainwestowanego kapitału, lub gdy rozważamy wypłaty dla produktów ubezpieczeń na życie z udziałem w zysku, które wypłacają klientowi gwarantowaną stopę zwrotu oraz bonus (udział w zysku) związany z osiągniętą stopą zwrotu portfela inwestycyjnego stanowiącego zabezpieczenie zobowiązania. Zgodnie z zasadą wyceny *market-consistent valuation* wartość zobowiązania $\xi(Y, Z)$ determinuje wartość portfela

zabezpieczającego Y i strategię zabezpieczającą Z . Mamy więc do czynienia z wzajemnym oddziaływaniem aktywów i pasywów na siebie. W języku równań BSDE, omówiony rodzaj zależności prowadzi do równania BSDE z opóźnieniem postaci

$$Y(t) = \xi(Y_T, Z_T) + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z(s) dW(s), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Wprowadzenie opóźnienia w warunku końcowym ξ w równaniu (3) nie powoduje żadnych dodatkowych komplikacji w porównaniu z równaniem (2). W szczególności, wyniki z pracy [7] nadal pozostają poprawne i można je było wykorzystać w pracy [1].

W pracy [1] zostało przedstawione nowe podejście do wyceny i konstrukcji strategii inwestycyjnych dla produktów z udziałem w zysku i funduszy z ochroną kapitału. Celem było uwzględnienie w konstrukcji produktu omówionych współzależności pomiędzy aktywami i pasywami oraz zaproponowanie metody matematycznej pozwalającej na przeprowadzenie odpowiednich obliczeń. Wykorzystane zostały równania BSDE z opóźnieniem i tym samym pokazane zostało pierwsze zastosowanie tych równań w finansach i ubezpieczeniach. Produkty z udziałem w zysku i fundusze z ochroną kapitału są często analizowane w literaturze aktuarialnej. W zdecydowanej większości prac zależności pomiędzy aktywami i pasywami są jednak zaniedbywane i przyjmowane jest założenie, że ubezpieczyciel lub zarządzający funduszem nie zmienia strategii inwestycyjnej. Założenie to nie jest spełnione w praktyce. Celem ubezpieczyciela i zarządzającego funduszem jest osiągnięcie gwarantowanej stopy zwrotu, ochrona zainwestowanego kapitału, wypracowanie atrakcyjnych zysków ponad gwarancję oraz zachowanie równowagi pomiędzy aktywami i pasywami. W konsekwencji, kluczowym staje się problem wyboru strategii inwestycyjnej. Przeglądając literaturę znalazłem tylko 4 artykuły, w których autorzy próbowali uwzględnić zależności pomiędzy aktywami i pasywami w produkcie z udziałem w zysku. W pracy [1] zaproponowałem rozwiązanie wykorzystujące równania BSDE z opóźnieniem.

W pracy [1] rozważany był rynek finansowy, na którym jedynym czynnikiem ryzyka jest losowa stopa procentowa modelowana przy użyciu ruchu Browna. Rynek finansowy składał się z rachunku bankowego oraz obligacji. **Rozpatrywane były trzy rodzaje schematów udziału w zysku i ochrony kapitału portfela inwestycyjnego.** W rozdziałach 3 i 4 rozważana była opcja *ratchet*, która wypłaca maksymalną wartość portfela mierzoną w określonych momentach czasu oraz jej ciągły odpowiednik, który wypłaca maksymalną wartość portfela w całym okresie czasu. Zapisane zostały odpowiednie równania BSDE z opóźnieniem oraz wyznaczone zostały w postaci jawnej rozwiązania równań i strategii inwestycyjne, które realizują wypłaty z opcji *ratchet* (Theorem 3.1, 4.1, 4.2). Otrzymane

strategie inwestycyjne są uogólnieniami strategii *Option Based Portfolio Insurance*, która ma na celu zabezpieczenie początkowej wartości kapitału inwestora. W rozdziale 5 rozważany był produkt, który gwarantuje klientowi wypłatę związaną z wartością indeksu giełdowego (benczmarku) oraz bonus oparty na średniej wartości rachunku inwestycyjnego (średniej wartości portfela replikującego benczmark). Zapisane zostało odpowiednie równanie BSDE z opóźnieniem oraz wyznaczone zostało w postaci jawnej rozwiązanie równania i strategia inwestycyjna, która pozwala pokryć wypłatę z benczmarku oraz bonus (Theorem 5.1). W rozdziale 6 rozważany był produkt uprawniający klienta do pobierania z rachunku, do momentu przejścia na emeryturę, ustalonej części maksymalnej wartości rachunku inwestycyjnego oraz gwarantujący ustaloną kwotę dożywotniego świadczenia po przejściu na emeryturę. Wyprowadzone zostało odpowiednie równanie BSDE z opóźnieniem. Niestety nie udało się znaleźć strategii inwestycyjnej w postaci jawnej dla tego problemu inwestycyjnego. Wykorzystując wyniki z pracy [6] zostało pokazane, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania BSDE i strategia inwestycyjna pozwalająca firmie ubezpieczeniowej wyeliminować ryzyko finansowe związane z produktem tego rodzaju (Theorem 6.1). Wszystkie wyznaczone w pracy [1] strategie inwestycyjne były nowe i nie pojawiły się wcześniej w literaturze.

Problemy inwestycyjne dla produktów z udziałem w zysku, które rozwiązałem wykorzystując równań BSDE z opóźnieniem, sprowadzają się do znalezienia punktu stałego równania opisującego wartość aktywów i pasywów. W ostatnim czasie dowiedziałem się, że niektóre aktuarialne firmy konsultingowe próbują wyceniać produkty z udziałem w zysku poprzez znalezienie punktu stałego równania opisującego wartość aktywów i pasywów. Oczywiście metoda wyceny proponowana przez firmy konsultingowe charakteryzuje się mniejszym poziomem wyrafinowania matematycznego niż metoda zaproponowane przeze mnie w pracy [1], ale idea wyceny produktów z udziałem w zysku jest zgodna z moim pomysłem.

W pracy [2] został wskazany drugi obszar zastosowań równań BSDE z opóźnieniem i zostało zaproponowane wykorzystanie równań BSDE z opóźnieniem do modelowania niemonotonicznych preferencji i efektu rozczarowania w ujęciu dynamicznym. Podejście było oryginalne, ponieważ dotychczas nikt nie próbował modelować efektu rozczarowania i niemonotonicznych preferencji w ujęciu dynamicznym w czasie ciągłym. W latach 80 XX wieku Bell⁴, Loomes i Sugden⁵ opisali efekt rozczarowania jako element mający wpływ na

⁴ Bell, D. (1985) Disappointment in decision making under uncertainty, *Operations Research* 33, 1-27.

podejmowanie decyzji i preferencje decydentów. Bell rozpoczął swoje rozważania nad efektem rozczarowania od pytania: „czy będziemy zadowoleni, gdy dostaniemy podwyżkę w wysokości 5000\$?”. W oczywisty sposób wcześniejsze oczekiwania co do wysokości podwyżki mają wpływ na nasze postrzeganie subiektywnej wartości podwyżki, którą dostaliśmy. W skrajnych sytuacjach, gdy oczekiwaliśmy podwyżki w wysokości 100000\$ efekt rozczarowania może być na tyle duży, że podwyżka w wysokości 5000\$ będzie potraktowana jako strata. Mamy więc do czynienia z niemonotonicznymi preferencjami, które dokładnie zostały opisane przez Rozena⁶. Celem pracy [2] była próba modelowania omówionych preferencji i zachowań w ujęciu dynamicznym przy pomocy równania BSDE zgodnie z teorią Penga nieliniowych wartości oczekiwanych⁷ i teorią Duffie’go i Epsteina rekursywnych użyteczności⁸. Równanie BSDE z opóźnieniem (2) dawało nadzieję na osiągnięcie wyznaczonego celu. Po pierwsze, skoro efekt rozczarowania pojawia się, gdy oczekiwania i preferencje z poprzednich okresów oddziałują na obecną wycenę, w równaniu BSDE powinniśmy użyć generatora (który w teorii rekursywnych użyteczności jest interpretowany jako infinitezymalny operator wyceny) z opóźnieniem postaci $f(t, Y_t, Z_t)$. Po drugie, w pracy [6] zostało pokazane, że rozwiązania równań BSDE z opóźnieniem nie spełniają twierdzenie porównawczego i własności monotoniczności względem warunku końcowego. Należy podkreślić, że niemonotonicznych preferencji i efektu rozczarowania nie można otrzymać wykorzystując równania BSDE bez opóźnień (1) ponieważ rozwiązanie takiego równania spełnia twierdzenie porównawcze i własność monotoniczności.

W pracy [2] został wykorzystany generator z opóźnieniem oparty na średniej ruchomej. Średnia ruchoma daje jeden z prostszych typów opóźnień. Średnia ruchoma jest także bardzo często wykorzystywana w różnych modelach ekonomicznych. **Badany był efekt rozczarowania związany z wcześniejszymi oczekiwaniami (wycenami) oraz efekt rozczarowania związany ze zmiennością wypłaty (czynnika ryzyka).** Podejmowanie decyzji na podstawie współczynnika zmienności także może prowadzić do efektu rozczarowania w sytuacji, gdy licząc na duży zysk decydujemy się wziąć udział w bardziej ryzykownym przedsięwzięciu, o większej zmienności, ale ostatecznie otrzymujemy małą

⁵ Loomes, G.; Sugden, R. (1986) Disappointment and dynamic consistency under uncertainty, *The Review of Economic Studies* 53, 271-282.

⁶ Rozen, K. (2010) Foundations of intrinsic habit formation. *Econometrica* 78, 1341-1373.

⁷ Peng, S. (1997) Backward SDE and related g-expectations, w książce El Karoui, N., Mazliak, L. *Backward Stochastic Differential Equations*, s. 141-161, Pitman Research Notes.

⁸ Duffie, D., Epstein, L. (1997) Stochastic differential utility, *Econometrica* 60, 353-394.

wypłatę. W pracy [2] rozważane były dwa równania BSDE, równania (3.1) i (4.1), z opóźnieniami opartymi na średniej ruchomej dla Y oraz dla Z , które modelowały odpowiednie efekty rozczarowania. Wykorzystując techniki z pracy [6] wyznaczone zostały rozwiązania równań BSDE z opóźnieniem i podane zostały operatory wyceny w postaci jawnej (Proposition 3.1, 4.1). Udowodnione zostały także podstawowe własności operatorów wyceny (Proposition 3.2, 3.3, 4.2, 4.3) oraz kluczowe własności braku monotoniczności względem wypłaty (Example 3.1, 4.2). Otrzymane operatory wyceniają obecną wartość wypłaty biorąc pod uwagę aktualne oczekiwania co do wypłaty oraz relację poprzednich oczekiwań do aktualnych oczekiwań (Rozdział 5). W konsekwencji, „obiektywny” wzrost wartości wypłaty ma dla nas mniejszą „subiektywną” wartość jeżeli oczekiwaliśmy dużego wzrostu wartości wypłaty. W skrajnej sytuacji, gdy na rynku panuje hossa i inwestor oczekuje dużej wypłaty, nagła bessy na rynku i związany z nią efekt rozczarowania zniechęca inwestora do dalszych inwestycji, co wyraża się w drastycznym spadku wartości wypłaty. Z drugiej strony, nieoczekiwana hossy na rynku po okresie bessy i związana z nią radość podnosi wartości inwestycji i ostatecznej wypłaty (jest to tzw. efekt euforii). Podobne efekty i schematy wyceny otrzymamy porównując zmienność ze zrealizowanym zyskiem (Rozdział 5). Zaproponowane równania BSDE z opóźnieniem opartym na średniej ruchomej są więc w stanie modelować efekt rozczarowania i euforii oraz związane z tymi efektami niemonotoniczne preferencje w ujęciu dynamicznym w czasie ciągłym.

Chciałbym dodać, że w ostatnim czasie pojawiły się prace, w których przedstawiono problemy z zakresu ryzyka kredytowego prowadzące do równań BSDE z opóźnieniem.

Równania BSDE – wykorzystanie do wyceny i zabezpieczenia płatności na rynkach niezupełnych

Celem prac [3]-[5] było wyznaczenie cen kontraktów ubezpieczeniowych i strategii zabezpieczających wypłaty ubezpieczeniowe w ogólnych modelach finansowych i aktuarialnych uwzględniających kluczowe czynniki ryzyka. Budowa ogólnych modeli ma swoje uzasadnienie. Firma prowadząca działalność ubezpieczeniowo-finansową jest narażona na wiele czynników ryzyka, np. na ryzyko stopy procentowej, zmienności akcji, krachów na giełdzie, gwarancji finansowych, śmiertelności, wydłużenia dalszego trwania życia, nieracjonalnych rezygnacji z polis, i powinna zgodnie z Dyrektywą Solvency II wycenić

poszczególne czynniki ryzyka, wartość całego zobowiązania oraz skonstruować portfel inwestycyjny najlepiej zabezpieczający zobowiązanie.

W modelowaniu ryzyka finansowego i ubezpieczeniowego ważną rolę odgrywają procesy skokowe. Matematycznym narzędziem, które pozwala rozważać ogólne procesy skokowe jest miara losowa. W pracach [3]-[5] rozpatrywane były modele aktuarialne i finansowe oparte na ruchu Browna i mierze losowej oraz równania BSDE postaci

$$Y(t) = \xi + \int_t^T f(s, Y(s), Z(s), U(s)) ds - \int_t^T Z(s) dW(s) - \int_t^T \int_R U(s, z) \tilde{N}(ds, dz), \quad 0 \leq t \leq T,$$

gdzie W jest ruchem Browna i N jest miarą losową.

W pracy [5] rozważany był problem zabezpieczenia kwadratowego dla wypłat ubezpieczeniowych oraz problem Markowitza wyboru strategii inwestycyjnej dla firmy ubezpieczeniowej. Rozpatrywany był rynek finansowy, który składa się z rachunku bankowego i akcji. Przyjęte zostało założenie o stałej stopie procentowej oraz wykorzystany został geometryczny proces Lévy'ego jako proces modelujący dynamikę ceny akcji. Dzięki zastosowaniu procesu Lévy'ego, zamiast ruchu Browna, uwzględnione zostały nagle zmiany ceny akcji (np. krachy na giełdzie) oraz grubo-ogonowe rozkłady stóp zwrotu z akcji. Rozważany był proces wypłat ubezpieczeniowych następującej postaci

$$P(t) = F \mathbf{1}\{t = T\} + \int_0^t H(s) ds + \int_0^t \int_R G(s, z) N(ds, dz), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

gdzie N jest miarą losową procesu zliczającego szkody, oraz F , H , G są procesami modelującymi wysokości świadczeń. Wprowadzone zostało założenie, że intensywność szkód jest losowa i określona przez ruch Browna niezależny od procesu Lévy'ego, który modeluje dynamikę akcji. Proces wypłat (4) zawiera wszystkie rodzaje świadczeń charakterystyczne dla produktów ubezpieczeniowych. W kontekście ubezpieczeń na życie, miara losowa N zlicza liczbę zgonów w portfelu, płatność H jest świadczeniem rentowym związanym z dożyciem kolejnego okresu ubezpieczenia, płatność G jest świadczeniem związanym ze śmiercią ubezpieczonego i płatność F jest świadczeniem związanym z dożyciem do końca trwania polisy. Płatności mogą zależeć od wartości ceny akcji. W konsekwencji, można było rozważać produkty z funduszem inwestycyjnym. Dzięki wprowadzeniu stochastycznej intensywności szkód można było także uwzględnić systematyczne ryzyko śmiertelności (ryzyko długowieczności) związane z nieoczekiwanymi zmianami intensywności

śmiertelności w populacji i wydłużającym się, w sposób nieprognozowany, dalszym trwaniem życia. W kontekście ubezpieczeń majątkowych i teorii kolektywnego ryzyka ubezpieczeniowego, miara losowa N zlicza szkody o danej wysokości i płatności G opisują szkody pojawiające się w losowych momentach czasu. Stochastyczna intensywność pozwoliła uwzględnić sezonowe wahania szkodowości w portfelu oraz inne losowe czynniki determinujące szkodowość.

W pracy [5] zostało przyjęte kryterium optymalizacyjne, zgodnie z którym poszukiwana była strategia inwestycyjna zabezpieczająca wypłaty ubezpieczeniowe z minimalnym błędem replikacji (równanie (3.2)). Rozważano średniokwadratowy błąd końcowy, porównując w chwili końcowej wartość portfela zabezpieczającego z wypłatą na dożycie, oraz średniokwadratowy błąd bieżący, porównując przez cały okres trwania polisy wartość portfela zabezpieczającego z rezerwą na przyszłe świadczenia (lub dowolnym zdefiniowanym przez ubezpieczyciela celem inwestycyjnym). Optymalna strategia zabezpieczająca została zdefiniowana przy pomocy rozwiązania równania BSDE (Theorem 4.1). W przypadku problemu kwadratowego względem miary martyngałowej oraz procesu Lévy'ego ze skokami o wartościach ograniczonych od góry, rozwiązanie równania BSDE zostało scharakteryzowane za pomocą twierdzenia o reprezentacji martyngału (Theorem 5.1). W rozdziale 6 zostały rozpatrzone najczęściej spotykane rodzaje świadczeń w ubezpieczeniach na życie i ubezpieczeniach majątkowych. W dwóch szczególnych przypadkach, uwzględniających ryzyko długowieczności i sezonowość szkodowości, zostały wyznaczone rozwiązania równania BSDE w postaci jawnej. Rozwiązania wykorzystywały reprezentację odpowiedniego martyngału (Lemma 6.1, 6.2). W Rozdziale 6.2 przeprowadzone zostało badanie symulacyjne, które pokazało, że wyprowadzona strategia inwestycyjna poprawia sytuację finansową firmy ubezpieczeniowej.

Należy podkreślić, że proces wypłat (4) może także opisywać wypłaty z portfela obligacji (aktywów) narażonych na ryzyko kredytowe. W kontekście portfela obligacji, miara losowa N zlicza zdarzenia związane z niewypłacalnością obligacji, płatność H jest dywidendą z obligacji, które nie zbankrutowały, płatność G jest stopą odzysku wypłacaną w chwili bankructwa obligacji i płatność F odpowiada wartości nominalnej dla obligacji, które nie zbankrutowały. **Otrzymane wyniki dotyczące wyceny i zabezpieczenia płatności ubezpieczeniowych można więc także odnieść do wyceny i zabezpieczenia płatności z aktywów narażonych na ryzyko kredytowe.** Dotyczy to głównie wyników z prac [3]-[4]. W

pracach [3]-[5] dokładnie zostały omówione różne szczególne przypadki procesu wypłat (4), które są kluczowe dla zastosowań finansowych i aktuarialnych.

W pracy [4] rozważany był problem maksymalizacji oczekiwanej użyteczności kapitału dla firmy ubezpieczeniowej oraz problem wyceny i zabezpieczenia kontraktu ubezpieczeniowego zgodnie z zasadą równoważności użyteczności. W pracy [4] rozpatrywany był rynek finansowy, który składa się z rachunku bankowego i akcji. Przyjęte zostało założenie o zerowej stopie procentowej, lub równoważnie, rozważane były zdyskontowane wartości. Dynamika akcji została opisana procesem Itô, tzn. stochastycznym równaniem różniczkowym z ruchem Browna z losowymi współczynnikami zależnymi od ruchu Browna. W konsekwencji, model dynamiki ceny akcji uwzględniał klasyczny model Blacka-Scholesa i modele stochastycznej zmienności akcji. Rozpatrywany był proces wypłat (4). Przyjęte zostało założenie, że stochastyczna intensywność szkód jest określona przez ruch Browna wykorzystany do modelowania rynku finansowego. Tego rodzaju założenie jest niezbędne jeżeli chcemy wyceniać instrumenty narażone na ryzyko kredytowe lub modelować nieracjonalne decyzje klientów o rezygnacji z polis. Prawdopodobieństwa niewypłacalności firm są bowiem powiązane z indeksem giełdowym lub innymi czynnikami finansowymi i decyzje klientów o rezygnacji z polis inwestycyjnych są także podyktowane sytuacją na rynku finansowym.

W pracy [4] wykorzystana została wykładnicza funkcja użyteczności. W pierwszej kolejności została wyznaczona strategia inwestycyjna, która maksymalizuje oczekiwaną użyteczność kapitału firmy ubezpieczeniowej inwestującej na rynku finansowym i pokrywającej wypłaty. Optymalna strategia inwestycyjna została scharakteryzowana przy pomocy rozwiązania równania BSDE (Theorem 3.1). Następnie, została wyznaczona cena kontraktu ubezpieczeniowego w oparciu o zasadę równoważności użyteczności. Cena kontraktu ubezpieczeniowego została zdefiniowana jako ekwiwalent, który zapewni równość pomiędzy maksymalną oczekiwaną użytecznością kapitału w sytuacji, gdy ubezpieczyciel inwestuje na rynku finansowym i nie sprzedaje polisy oraz maksymalną oczekiwaną użytecznością kapitału w sytuacji, gdy ubezpieczyciel inwestuje na rynku finansowym, sprzedaje polisę ubezpieczeniową, zbiera składkę i pokrywa świadczenia (równanie (4.1)). Cena kontraktu została scharakteryzowana jako rozwiązanie równania BSDE (Theorem 4.1). Pokazane zostało, że otrzymana cena jest zgodna z wyceną arbitrażową. W szczególności, wyznaczona została miara martyngałowa, której należy użyć do arbitrażowej wyceny płatności ubezpieczeniowych w rozważanym modelu (równanie (4.4)). Strategia

zabezpieczająca płatności została zdefiniowana jako wielkość wynikająca ze zmiany optymalnej strategii inwestycyjnej dla firmy ubezpieczeniowej maksymalizującej oczekiwaną użyteczność kapitału i podejmującej decyzję o sprzedaży polisy ubezpieczeniowej. Strategia zabezpieczająca została otrzymana jako rozwiązanie równania BSDE charakteryzującego cenę kontraktu ubezpieczeniowego (Proposition 4.1).

W pracy [3] rozważane były trzy metody wyceny i zabezpieczenia wypłat ubezpieczeniowych: metoda oparta na współczynniku Sharpe'a, metoda oparta na lokalnym kryterium Markowitza oraz metoda oparta na mierze niepewności prawdopodobieństw. Rozpatrywany był rynek finansowy złożony z rachunku bankowego i akcji. Wprowadzona została losowa stopa procentowa modelowana za pomocą ruchu Browna. Dynamika ceny akcji została opisana procesem Itô, tzn. stochastycznym równaniem różniczkowym z ruchem Browna z losowymi współczynnikami zależnymi od ruchu Browna. Dynamika ceny akcji uwzględniała więc klasyczny model Blacka-Scholesa oraz modele stochastycznej zmienności akcji. Rozpatrywany był proces wypłat (4). Przyjęte zostało założenie, że intensywność szkód jest określona przez ruch Browna wykorzystany do modelowania rynku finansowego oraz przez dodatkowy niezależny ruch Browna. W konsekwencji, model z pracy [3] uwzględniał zarówno systematyczne ryzyko śmiertelności (ryzyko długowieczności) i sezonowe wahania szkodowości, tak jak w [5], oraz nieracjonalne rezygnacje klientów z polis i ryzyko kredytowe, tak jak w [4].

Pierwsza metoda wyceny oparta na współczynniku Sharpe'a odwoływała się do teorii *no-good-deal pricing* zaproponowanej w 2000 r. przez Cochrane'a i Saa-Requejo⁹. Zgodnie z teorią *no-good-deal pricing* współczynniki Sharpe'a dla inwestycji dostępnych na konkurencyjnym rynku nie mogą przyjmować zbyt dużych wartości ponieważ takie uprzywilejowane inwestycje natychmiast zniknęłyby z rynku. Teoria *no-good-deal pricing* i ograniczenie związane z wartościami współczynników Sharpe'a pozwalają odpowiednio ograniczyć zbiór miar martyngałowych i zdefiniować cenę zobowiązania jako supremum oczekiwanych wypłat względem miar z pewnego zbioru miar martyngałowych (równania (2.7), (3.4) i (3.5)). Odwołując się do teorii *no-good-deal pricing* wypłaty ubezpieczeniowe zostały wycenione przy pomocy „najgorszej” miary martyngałowej przy ograniczeniu współczynnika Sharpe'a (Theorem 3.1). Druga metoda wyceny i zabezpieczenia oparta na lokalnym kryterium Markowitza uwzględniała oczekiwaną stopę zwrotu z kapitału netto na

⁹ Cochrane, J., Saa-Requejo J. (2000) Beyond arbitrage: good-deal asset price bounds in incomplete markets. *Journal of Political Economy* 1008, 79-119.

infinitymalnym przedziale czasu $\mu(t)$ oraz zmienność kapitału netto na infinitymalnym przedziale czasu $\sigma(t)$. Kapitał netto został zdefiniowany jako różnica pomiędzy wartością portfela zabezpieczającego a wartością rezerwy – ceną zobowiązania. Wykorzystana została miara ryzyka lokalnego postaci $\rho(t) = L\sigma(t) - \mu(t)$ (równanie (4.4)). Zgodnie z kryterium wyboru Markowitza wyznaczono została strategia zabezpieczająca, która minimalizuje miarę ryzyka lokalnego ρ w każdym momencie czasu t . Następnie, jako cena zobowiązania została przyjęta wartość, przy której miara ryzyka ρ wynosi zero w każdym momencie czasu t , lub równoważnie, współczynnik Sharpe'a dla kapitału netto przyjmuje w każdej chwili t z góry zadaną wielkość L (Theorem 4.1). Trzecia metoda wyceny oparta na mierze niepewności prawdopodobieństw odwoływała się do pojęcia niepewności wprowadzonej przez Knighta¹⁰, który zauważył że decydent w procesie decyzyjnym powinien brać pod uwagę także niepewność co do prawdopodobieństw determinujących rozkład (*ambiguity risk*). Zgodnie z teorią niepewności Knighta wprowadzony został zbiór równoważnych miar probabilistycznych (rozkładów prawdopodobieństw) dla ewolucji czynników ryzyka w modelu. Zbiór taki można także interpretować jako zbiór przedziałów ufności dla niepewnych oszacowań parametrów w modelu. Zdefiniowana została miara ryzyka jako oczekiwana wartość deficytu będącego wynikiem inwestycji na rynku finansowym i pokrycia wypłat ubezpieczeniowych względem prawdopodobieństwa, które prowadzi do największego oczekiwanego deficytu (równania (2.5) i (5.1)). Wyznaczona została strategia zabezpieczająca, która minimalizuje miarę ryzyka w każdym momencie czasu oraz cena kontraktu, która pozwoli pokryć najgorszy oczekiwany deficyt (Theorem 5.1, 5.2).

Każda z trzech metod wyceny i zabezpieczenia prowadziła do innego problemu optymalizacyjnego. Cena oraz strategia zabezpieczająca wypłaty ubezpieczeniowe zostały scharakteryzowane przy pomocy rozwiązania równania BSDE (Theorem 3.1, 4.1, 5.2). Okazało się, że wszystkie trzy metody prowadzą do tej samej ceny i strategii zabezpieczającej przy założeniu, że dopuszczamy wyłącznie wyceny arbitrażowe. Pokazane zostało, że rozwiązując otrzymane równanie BSDE nie zawsze jednak dostaniemy cenę arbitrażową (Example 4.1). Udowodnione twierdzenia zawierają minimalne warunki, przy których stosując zaproponowane metody wyceny i rozwiązując równanie BSDE otrzymamy cenę arbitrażową. Wyznaczona została miara martyngałowa, którą należy wykorzystać do wyceny arbitrażowej (równanie (3.9)). Zbadane zostały także pewne własności ceny oraz strategii

¹⁰ Knight, F. (1921) *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mufflin.

zabezpieczającej (Lemma 3.1, 4.1). Badanie symulacyjne wykazało, że zastosowanie wyznaczonej strategii inwestycyjnej poprawia kondycję finansową firmy ubezpieczeniowej (Rozdział 6).

W pracach [3]-[5] wyznaczone zostały postacie strategii zabezpieczających, które w sposób jawny odwoływały się do rozwiązań równań BSDE. W niektórych szczególnych przypadkach rozwiązane zostały równania BSDE i otrzymane zostały reprezentacje rozwiązań w postaci wartości oczekiwanej czynników ryzyka. Takie reprezentacje pozwalają na zastosowanie metody Monte Carlo do wyznaczenia wartości numerycznych lub wykorzystanie jawnych wzorów matematycznych dostępnym w prostszych modelach. We wszystkich przypadkach otrzymane równania BSDE można rozwiązać wykorzystując metodę *Least Squares Monte Carlo*, która została omówiona i zastosowana w rozdziale 6 w pracy [3].

Najważniejszymi rezultatami prac [3]-[5] są otrzymane postacie optymalnych strategii inwestycyjnych oraz wartości zobowiązań, które wskazują jak należy dopasować strategię zabezpieczającą oraz rezerwy do zmieniających się warunków ekonomicznych i demograficznych (czynników ryzyka). **W pracach [3]-[5] zostały wyznaczone strategie zabezpieczające oraz wartości zobowiązań w bardzo ogólnych modelach, bliższych rzeczywistości aktuarialnej i finansowej, które nie były wcześniej rozważane w literaturze. Cechami wyróżniającymi moje prace [3]-[5] od pozostałych publikacji w tym obszarze są liczba i rodzaj uwzględnionych czynników ryzyka, ogólne postacie dynamik oraz bezpośrednia charakteryzacja rozwiązań optymalnych przy pomocy równań BSDE.** Warto zwrócić uwagę, że w pracach [3]-[5] zaadoptowano znane z matematyki finansowej kryteria wyceny oraz zabezpieczenia wypłat na rynkach niezupełnych do modeli ubezpieczeniowych, co także stanowiło nowość. Z matematycznego punktu widzenia, nowość polegała na wprowadzenie ogólnego procesu skokowego i rozważaniu równań BSDE z miarą losową.

Chciałbym podkreślić, że mimo iż moje prace odwołują się do teorii procesów stochastycznych i w wielu miejscach mają charakter matematyczny, to jednak główne rezultaty i wnioski moich prac mają charakter ekonomiczny. Równania BSDE oraz metody analizy stochastycznej posłużyły mi jako narzędzia pozwalające rozwiązać ważne, z ekonomicznego punktu widzenia, problemy wyceny i replikacji wypłat. W swoich pracach zawsze przykładałem dużą wagę do wyjaśnienia motywacji ekonomicznej stojącej za wyborem określonej ogólnej dynamiki procesu i użyciem konkretnego kryterium optymalizacyjnego. Wszystkie rezultaty, własności, strategie inwestycyjne oraz ceny

zobowiązań zostały zinterpretowane w kontekście omawianego problemu ekonomicznego. Z tych powodów składam swój wniosek o przeprowadzenie postępowania habilitacyjnego w dziedzinie nauki ekonomiczne w dyscyplinie ekonomia.

5. Pozostałe publikacje naukowe oraz prace badawcze

Mój pozostały dorobek naukowy składa się z następujących publikacji naukowych i prac badawczych:

8. Ł. Delong (2011) No-good-deal, local mean-variance and ambiguity risk pricing and hedging for an insurance payment processes – the extended version, *Instytut Ekonometrii SGH, badanie statutowe nr 03/BMN/13/11*,
9. Ł. Delong (2011) Applications of time-delayed backward stochastic differential equations to pricing, hedging and portfolio management – the extended version, *Instytut Ekonometrii SGH, badanie własne nr 03/E/0024/10*,
10. Ł. Delong (2011) Practical and theoretical aspects of market-consistent valuation and hedging of insurance liabilities, *Bank i Kredyt* 42, 49-78 (MNiSW=9p.),
11. Ł. Delong (2010) Applications of backward stochastic differential equations to insurance and finance, *Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH* 21, 11-26 (MNiSW=9p.),
12. Ł. Delong (2009) Indifference pricing of a life insurance portfolio with systematic mortality risk in market driven by a Lévy noise, *Scandinavian Actuarial Journal* 1, 1-26,
13. Ł. Delong, C. Klüppelberg (2008) Optimal investment and consumption in a Black-Scholes market with stochastic coefficients driven by a non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process, *The Annals of Applied Probability* 18, 879-908 (IF=1,285; MNiSW=32p.),
14. Ł. Delong, R. Gerrard, S. Haberman (2008) Mean-variance optimization problems in an accumulation phase for a defined benefit plan, *Insurance: Mathematics and Economics* 42, 107-118 (IF=1,477; MNiSW=32p.),
15. Ł. Delong, R. Gerrard (2007) Mean-variance portfolio selection for a non-life insurer, *Mathematical Methods of Operations Research* 66, 339-367 (IF=0,4; MNiSW=13p.),
16. Ł. Delong (2007) Modele kursów walut, *opracowanie na zamówienie Narodowego Banku Polskiego*,

17. Ł. Delong (2006) Optimal investment and consumption in the presence of default on a financial market driven by a Lévy noise, *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska: Mathematica LX*, 1-15 (MNiSW=6p),
18. Ł. Delong (2005) Optimal investment strategy for non-life insurance company: quadratic loss, *Applicationes Mathematicae* 32, 263-277 (MNiSW=9p.),
19. Ł. Delong (2004) Ocena ryzyka portfela ubezpieczeń komunikacyjnych przy użyciu teorii ruiny, *Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH* 14, 27-44 (MNiSW=9p),
20. Ł. Delong, W. Bijak, M. Mandela (2004) Testowanie zyskowości produktów ubezpieczeń na życie, *Prace Naukowe Instytutu Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej* 75, 115-13.

Prowadząc badania w obrębie tematów [1] i [3] zebrałem materiał znacznie przekraczający rozmiary publikacji w czasopiśmie naukowym. Najważniejsze rezultaty znalazły się w opublikowanych artykułach, cały materiał został przedstawiony jako badania statutowe i własne [8] i [9].

W pracy [8] szczegółowo został omówiony przypadek wyceny arbitrażowej dla metod wyceny zaproponowanych w [3]. Metody wyceny oparte na współczynniku Sharpe'a, lokalnym kryterium Markowitza oraz mierze niepewnych prawdopodobieństw nie zawsze prowadzą do ceny wolnej od arbitrażu. W pracy [3] zostały podane dwa warunki, które zapewniają, że rozwiązując postawione problemy optymalizacyjne i odpowiednie równanie BSDE otrzymamy cenę wolną od arbitrażu. Jeden z tych warunków dotyczył parametrów w modelu, drugi związany był z rozwiązaniem równania BSDE. Ponieważ w ogólnym modelu nie jesteśmy w stanie otrzymać rozwiązania równania BSDE w postaci jawnej, drugi warunek jest mało użyteczny z punktu widzenia zastosowań. W rozdziale 7 pracy [8] rozwiązanie równania BSDE zostało scharakteryzowane w postaci wartości oczekiwanej wypłaty i **warunek wyceny arbitrażowej związany z rozwiązaniem równania BSDE został wyrażony przy pomocy warunku związanego z parametrami modelu** (Lemma 7.1). W konsekwencji, wyznaczony został warunek wyceny arbitrażowej, który może być sprawdzony w zastosowaniach. W pracy [8] zostały także omówione bardziej szczegółowo dowody twierdzeń i rezultaty związane z metodami wyceny i problemami optymalizacyjnymi. Rozważone były ponadto pewne szczególne przypadki modeli finansowych i aktuarnych i wyznaczone zostały rozwiązania równania BSDE w postaci,

która odwołuje się do prostych metod Monte Carlo lub wzorów analitycznych i nie wymaga zastosowania metody *Least Squares Monte Carlo* (Rozdziały 5 i 7).

W pracy [9], w kontekście rozważanego problemu emerytalnego, została zaproponowana metoda numeryczna rozwiązania równania BSDE z opóźnieniem (Rozdział 7). Była to pierwsza metoda numeryczna pozwalająca rozwiązać równanie BSDE z opóźnieniem. Zaproponowany algorytm numeryczny opiera się na dyskretyzacji przedziału czasu, aproksymacji rozwiązania przy pomocy ciągu Picarda rozwiązań odpowiednich równań rekurencyjnych i aproksymacji przyrostu ruchu Browna przy pomocy zmiennej losowej o rozkładzie Bernoulliego. Badania numeryczne pokazały, że ciąg Picarda rozwiązań równań rekurencyjnych jest zbieżny w kilku iteracjach. Efektywność algorytmu jest jednak znacznie ograniczona w związku z nie-markowską strukturą równania i uwzględnieniem opóźnienia w generatorze równania BSDE. W sytuacji gdy generator w chwili t zależy od wartości rozwiązania równania na całym przedziale $[0, t]$, zaproponowana metoda wymaga wyliczenia wartości generatora w chwili t na podstawie wszystkich kombinacji realizacji ciągu zmiennych losowych Bernoulliego na przedziale $[0, t]$. Zaproponowany algorytm nie będzie więc efektywny dla odległego horyzontu czasu. Jednocześnie należy podkreślić, że równanie BSDE z opóźnieniem posiada dokładnie jedno rozwiązanie, które można wyznaczyć przy pomocy ciągu Picarda, tylko dla bliskiego horyzontu czasu (wniosek z pracy [6]), co daje nadzieję na zastosowanie zaproponowanego algorytmu w praktyce. W pracy [9] w oparciu o opisany algorytm wyznaczona została wartość portfela inwestycyjnego (wartość kontraktu) replikującego gwarantowaną dożywotnią rentę po przejściu na emeryturę oraz przedemerytalną konsumpcję uzależnioną od maksymalnej wartości portfela inwestycyjnego (Example 7.1). W pracy [9] podane zostały także dodatkowe przykłady produktów z udziałem w zysku, które można wycenić wykorzystując równania BSDE z opóźnieniem.

Praca [10] powstała jako wynik zainteresowania europejską dyrektywą Solvency II oraz wyceną rynkową zobowiązań ubezpieczeniowych. Wyjaśnione zostało podejście aktuarialne do wyceny ryzyka ubezpieczeniowego oparte na prawie wielkich liczb i zasadzie dywersyfikacji oraz podejście arbitrażowe do wyceny ryzyka finansowego oparte na zasadzie braku arbitrażu i replikacji (Rozdział 2). Następnie, przedstawione zostały zasady wyceny rynkowej dla zobowiązań ubezpieczeniowych, które łączą podejście aktuarialne z arbitrażową wyceną (Rozdział 3). Jako przykład, omówiona została wycena produktu z funduszem inwestycyjnym (Example 3.1). W rozdziale 4 podane zostały twierdzenia analizy

stochastycznej, które mogą być pomocne w praktyce przy wycenie rynkowej zobowiązań. Wyjaśniona została także ważna rola metod analizy stochastycznej i modelowania stochastycznego w praktyce aktuarialnej przy wyznaczaniu wartości rynkowych i wymogów kapitałowych. W pracy [10] rozwiązany został ponadto problem zabezpieczenia wypłat z portfela ubezpieczeń na życie w sytuacji, gdy na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy, akcja oraz obligacja *mortality bond*. W rozdziale 5 wyznaczone zostały optymalne alokacje kapitału pomiędzy rachunek bankowy, akcję i obligację *mortality bond*, która pozwalają zabezpieczyć wypłaty (4) z kontraktu ubezpieczeń na życie w sensie doskonałej replikacji (gdy nie uwzględniamy systematycznego ryzyka śmiertelności) i minimalnego błędu średniokwadratowego replikacji (gdy uwzględniamy systematycznie ryzyko śmiertelności). **Celem pracy [10] było usystematyzowanie wiadomości z matematyki aktuarialnej i finansowej w kontekście współczesnych zasad zarządzania ryzykiem, powiązanie praktycznych metod wyceny z teoretycznymi modelami, wyjaśnienie pojęć z Dyrektywy Solvency II oraz uogólnienie pewnych rezultatów i metod z matematyki finansowej i aktuarialnej.**

W pracy [11] zostały omówione zastosowania równań BSDE w ubezpieczeniach i finansach. Przedstawione zostały korzyści związane z wykorzystaniem równań BSDE jako narzędzia służącego do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych i definiowania nieliniowych wartości oczekiwanych. W pracy [11], która ma charakter przeglądowy, zwrócono szczególną uwagę na specyfikę zastosowań równań BSDE w ubezpieczeniach. Położenie nacisku na zastosowania aktuarialne było kluczowe gdyż zdecydowana większość prac omawiających równania BSDE skupia się na zastosowaniach finansowych i pomija aspekty aktuarialne. W pracy [11] podane zostały twierdzenia dotyczące istnienia rozwiązania równania BSDE oraz twierdzenie porównawcze (Theorem 1.1, 1.2). Przedstawiona została motywacja do rozważania nieliniowych wartości oczekiwanych i omówione zostały dwa najważniejsze przykłady nieliniowych wartości oczekiwanych: całka Choquet'a oraz *g-expectation* (Rozdział 2). Podane zostały własności i przykłady nieliniowych wartości oczekiwanych *g-expectations*. Pokazane zostało, że równania BSDE pojawiają się w naturalny sposób, gdy chcemy rozwiązać problem replikacji wypłaty (Rozdział 2). Omówione zostały trzy problemy replikacji: problem replikacji wypłat finansowych w modelu Blacka-Scholesa, problem replikacji wypłat ubezpieczeniowych w modelu Blacka-Scholes przy założeniu dywersyfikacji ryzyka ubezpieczeniowego oraz problem replikacji wypłat ubezpieczeniowych na rynku złożonym z rachunku bankowego,

akcji i obligacji *mortality bond*. Ceny zobowiązań oraz strategie replikujące zostały scharakteryzowane za pomocą rozwiązań równań BSDE. W rozdziale 3 wyjaśniona została konieczność rozważania problemów optymalizacyjnych przy wycenie i zabezpieczeniu wypłat ubezpieczeniowych. W oparciu o wyniki z pracy [5] podane zostało rozwiązanie pewnego problemu zabezpieczenia kwadratowego dla wypłat ubezpieczeniowych. Artykuł [11] opierał się na wystąpieniu, które wygłosiłem w 2009 r. podczas Konferencji Aktuariatnej w Warszawie, i za które zdobyłem nagrodę za najlepszy referat.

Celem prac [12], [14], [15] była wycena i wyznaczenie strategii zabezpieczających wypłaty ubezpieczeniowe. Oryginalność modeli z prac [12], [14], [15] polegała na rozpatrywaniu dynamiki ceny akcji generowanej przez geometryczny proces Lévy'ego, który w tamtym okresie dopiero zaczął się pojawiać w modelach sterowania stochastycznego, oraz na włączeniu do rozważań dodatkowego niezależnego procesu stochastycznego - intensywności śmiertelności lub szkód (systematycznego ryzyka szkód), które dotychczas w literaturze były traktowane w sposób deterministyczny. Zaproponowane zostały także modyfikacje powszechnie używanych kryteriów optymalizacyjnych. Do rozwiązania problemów optymalizacyjnych zostały wykorzystane równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana. W wyniku dokonania odpowiednich podstawień (poprzez zgađnięcie postaci rozwiązania równania HJB) w pracach [12], [14] i [15] zostały wyznaczone rozwiązania równań HJB oraz optymalne strategie w postaci jawnej.

W pracy [12] rozpatrywane były stochastyczna intensywność śmiertelności i systematyczne ryzyko śmiertelności (ryzyko długowieczności) oraz klasyczny proces wypłat ubezpieczeń na życie ze stałymi świadczeniami. Rozważany był problem wyceny i zabezpieczenia wypłat ubezpieczeniowych zgodnie z zasadą równoważności użyteczności. Celem było wyznaczenie ceny zobowiązania i strategii zabezpieczającej, przy których maksymalna oczekiwana użyteczność przyszłego kapitału ubezpieczyciela inwestującego na rynku finansowym jest taka sama w sytuacji, gdy ubezpieczyciel sprzedaje kontrakt, pobiera składkę i pokrywa świadczenia, jak i w sytuacji gdy nie sprzedaje kontraktu. Dodatkowo, zaproponowana została metoda wyceny, zgodnie z którą cena zobowiązania i strategia zabezpieczająca zostały wyznaczone tak, aby zrównać maksymalne oczekiwane użyteczności zdyskontowanego kapitału w sytuacji sprzedaży kontraktu oraz w sytuacji braku sprzedaży. Zastosowana została wykładnicza funkcja użyteczności. Rozwiązane zostały

problemy maksymalizacji oczekiwanej użyteczności oraz wyprowadzone zostały ceny i strategie zabezpieczające (Rozdział 5).

Prace [14] i [15] powstały podczas mojego pobytu w Cass Business School w Londynie. **W pracy [14] rozważany był problem zabezpieczenia wartości renty dożywotniej w chwili przejścia na emeryturę członka planu emerytalnego o zdefiniowanym świadczeniu.** Rozpatrywane były stochastyczna intensywność śmiertelności i ryzyko długowieczności. Celem było znalezienie optymalnej strategii inwestycyjnej oraz optymalnej stopy kontrybucji dla planu emerytalnego, które zapewnią najmniejszym błąd replikacji zobowiązania. Typowe w literaturze kryterium błędu średniokwadratowego zostało zastąpione kryterium minimalizacji wariancji błędu replikacji przy warunku zerowej oczekiwanej wartości deficytu planu emerytalnego. Rozwiązany został kwadratowy problem optymalizacyjny i wyznaczona została optymalna strategia inwestycyjna wraz z optymalną stopą kontrybucji (Theorem 4.2, 5.1).

W pracy [15] rozważany był problem Markowitz'a wyboru strategii inwestycyjnej dla zakładu ubezpieczeń majątkowych, który pokrywa szkody generowane przez proces Coxa. Dzięki zastosowaniu procesu Coxa uwzględniona została w modelu stochastyczna zmienność intensywności szkód, która może pojawić się w rzeczywistości w wyniku zmieniających się (losowych) czynników atmosferycznych. Wysokość szkody została opisana rozkładem prawdopodobieństwa. Kryterium optymalizacyjne wyboru strategii brało pod uwagę odchylenie procesu środków własnych ubezpieczyciela od zadanego celu inwestycyjnego. Rozważany był zarówno koszt końcowy, jak i koszt bieżący odchylenia. Typowe w literaturze kryterium błędu średniokwadratowego zostało zastąpione kryterium minimalizacji wariancji przy warunku definiującym wartość oczekiwaną środków ubezpieczyciela w chwili końcowej. Rozwiązany został kwadratowy problem optymalizacyjny i wyznaczona została optymalna strategia inwestycyjna (Theorem 4.2). Dodatkowo, wyznaczona została linia rynku kapitałowego, która okazała się być funkcją kwadratową, oraz portfele efektywne (Lemma 5.1).

Praca [13] powstała podczas mojego pobytu na Politechnice w Monachium. **W pracy [13] rozważany był problem inwestycyjny Mertona dla inwestora z potęgową funkcją użyteczności w modelu finansowym stochastycznej zmienności Barndorffa-Nielsen i Shepharda.** Wyznaczone zostały optymalne strategie inwestycyjne i konsumpcji, które

maksymalizują oczekiwaną użyteczność z konsumpcji w danym okresie czasu i kapitału końcowego (Theorem 6.1). Optymalna konsumpcja została scharakteryzowana przy pomocy rozwiązania nieliniowego cząstkowego równania różniczkowo-całkowego pierwszego rzędu. Optymalna strategia inwestycyjna została podana w postaci jawnej. W przykładzie numerycznym wyznaczone zostało rozwiązanie równania różniczkowego charakteryzującego konsumpcję za pomocą metody różnic skończonych. Moja wspólna praca z prof. Claudią Klüppelberg była drugą pracą w literaturze, która poruszała optymalny, dynamiczny problem inwestycyjny w modelu Barndorffa-Nielsena i Shepada.

W pracy [17] rozważany był problem Mertona maksymalizacji oczekiwanej użyteczności z konsumpcji w danym okresie czasu i kapitału końcowego dla potęgowej i logarytmicznej funkcji użyteczności. Rozpatrywany był rynek finansowy złożony z rachunku bankowego ze stałą intensywnością oprocentowania oraz akcji, która była modelowana z wykorzystaniem geometrycznego procesu Lévy'ego. Wprowadzona została możliwość bankructwa inwestora i konieczność zakończenia inwestycji w losowym momencie czasu. Intensywność bankructwa modelowana była z wykorzystaniem niezależnego ruchu Browna. Postawione problemy optymalizacyjne zostały rozwiązane za pomocą równań HJB (Rozdział 4).

W pracy [18] rozważany był rynek finansowy złożony z rachunku bankowego ze stałą intensywnością oprocentowania oraz akcji, której dynamika ceny modelowana była przy użyciu geometrycznego ruchu Browna. Proces szkód modelowany był jako złożony proces Poissona. **Celem pracy [18] było znalezienie strategii inwestycyjnej, przy której proces wartości środków własnych ubezpieczyciela, przez cały czas trwania umowy, byłby powyżej wymaganej rezerwy na przyszłe świadczenia.** Zastosowane zostały niesymetryczne względem zera, kwadratowe funkcje straty do określenia kosztu bieżącego braku dopasowania środków własnych w stosunku do rezerwy oraz kosztu końcowego nie osiągnięcia dodatniej stopy zwrotu dla środków własnych. Rozwiązany został problem minimalizacji kwadratowego kosztu bieżącego i końcowego za pomocą równania HJB i wyznaczona została optymalna strategia inwestycyjna w postaci jawnej (Rozdział 3).

Praca [16] zawiera przegląd modeli kursów walut. W pracy zostały omówione zarówno modele oparte na szeregach czasowych, jak i modele oparte na stochastycznych równaniach różniczkowych. Praca [16] była elementem projektu zleconego przez NBP.

W pracy [19] zostało wyznaczone prawdopodobieństwo ruiny dla portfela ubezpieczeń komunikacyjnych. Rozpatrywana była sytuacja, gdy klienci podlegają systemowi bonus-malus. Wykorzystany został model teorii ryzyka ubezpieczeniowego, metody numeryczne i oszacowania prawdopodobieństw ruiny z mojej pracy magisterskiej.

W pracy [20] została omówiona metoda oceny rentowności produktów ubezpieczeń na życie z użyciem przepływów pieniężnych. Przedstawiona metoda jest powszechnie stosowana w praktyce przy konstrukcji produktów ubezpieczeń na życie.

6. Udział w międzynarodowych projektach badawczych

Miałem zaszczyt współpracować z największymi autorytetami w zakresie matematyki aktuarialnej, finansowej i metod stochastycznych. Odbyłem trzy dłuższe wyjazdy o charakterze badawczym do zagranicznych ośrodków akademickich. Przed obroną rozprawy doktorskiej, w okresie styczeń 2006-czerwiec 2006 przybywałem w Cass Business School (Faculty of Actuarial Science and Insurance) w Londynie, gdzie **współpracowałem z dr. Russellem Gerrardem i prof. Stevenem Habermanem**, następnie w okresie wrzesień 2006-grudzień 2006 przybywałem na Politechnice (Chair of Mathematical Statistics) w Monachium gdzie **współpracowałem z prof. Claudią Klüppelberg**. Po obronie rozprawy doktorskiej, w okresie luty 2009-kwiecień 2009 przebywałem na Uniwersytecie Humboldta (Department of Mathematics) w Berlinie, gdzie **współpracowałem z prof. Peterem Imkeller**. Efektem moich wyjazdów były prace naukowe, które zostały omówione w rozdziałach 4 i 5. W ostatnim okresie **rozpocząłem współpracę z prof. Antoonem Pelsserem** (Uniwersytet w Maastricht, Department of Finance). W marcu 2012 r. odbyłem dwudniową wizytę na Uniwersytecie w Maastricht. We wrześniu 2012 r. planuję kolejną wizytę w Maastricht. Do końca roku powinien powstać pierwszy wspólny artykuł.

7. Nagrody, granty i stypendia związane z działalnością naukową

Otrzymałem następujące nagrody za swoją działalność naukową:

Październik 2011	Nagroda Rektora Szkoły Głównej Handlowej stopnia drugiego za osiągnięcia w działalności naukowej
------------------	--

Wrzesień 2010	Nagroda za wyróżniający się referat wygłoszony podczas VI Konferencji „Zagadnienia Aktuariale – teoria i praktyka”
Październik 2009	Nagroda za najlepszy referat wygłoszony podczas V Konferencji „Zagadnienia Aktuariale – teoria i praktyka”
Luty 2009	Nagroda Prezesa Rady Ministrów za wyróżniającą się rozprawę doktorską
Październik 2008	Nagroda Rady Naukowej Instytutu Matematycznego PAN za wyróżniającą się rozprawę doktorską
Październik 2008	Nagroda Rektora Szkoły Głównej Handlowej za wyróżniającą się rozprawę doktorską
Listopad 2007	Nagroda Fundacji PZU za uzyskanie pierwszego miejsca w konkursie na najlepszą pracę doktorską z zakresu nauk aktuarialnych

Otrzymałem następujące granty i stypendia:

Grudzień 2011-Listopad 2014

Stypendium Ministerstwa Szkolnictwa Wyższego i Nauki dla wybitnych młodych naukowców (dziedzina nauki: nauki ekonomiczne - ekonomia)

2011 **Stypendium Fundacji na rzecz Nauki Polskiej dla młodych naukowców, Program START** – przedłużenie stypendium z roku 2010 (dziedzina nauki: nauki ekonomiczne - ekonomia)

2010 **Stypendium Fundacji na rzecz Nauki Polskiej dla młodych naukowców, Program START** (dziedzina nauki: nauki ekonomiczne - ekonomia)

Luty 2009-Kwiecień 2009

Grant przyznany przez European Science Foundation (w ramach programu Advanced Mathematical Methods for Finance) finansujący pobyt na Uniwersytecie Humboldta w Berlinie

Luty 2007-Wrzesień 2007

Stypendium przyznane przez Szkołę Główną Handlową na dokończenie rozprawy doktorskiej

Listopad 2006-Październik 2007

Grant promotorski przyznany przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego (dyscyplina – ekonometria, statystyka i informatyka ekonomiczna)

Tytuł projektu badawczego: „*Optymalne strategie inwestycyjne na rynkach finansowych z szumem Lévy’ego, wraz z zastosowaniami w ubezpieczeniach*”, kierownik projektu: prof. dr hab. Łukasz Stettner (IMPAN)

Wrzesień 2006-Grudzień 2006

Grant przyznany przez European Science Foundation (w ramach programu Advanced Mathematical Methods for Finance) finansujący pobyt na Politechnice w Monachium

8. Referaty wygłoszone na zagranicznych konferencjach naukowych

W marcu 2011 r. **wygłosiłem referat plenarny, jako zaproszony prelegent, na międzynarodowej konferencji „Workshop on Stochastic Models and Control”** w Bad-Herrenalb w Niemczech na temat: „Time-delayed backward stochastic differential equations: the theory and applications to finance and insurance”. Konferencja została zorganizowana przez Politechnikę w Karlsruhe. Zaproszenie na tę konferencję traktuję jako duże wyróżnienie, ponieważ wśród zaproszonych prelegentów byli profesorowie będący światowymi autorytetami z zakresu metod sterowania stochastycznego i zastosowań optymalizacji w finansach i ubezpieczeniach.

Ponadto, **przedstawiłem swoje wyniki na następujących konferencjach naukowych o zasięgu międzynarodowym:**

1. *Actuarial and Financial Mathematics Conference*, Bruksela, 2012: No-good-deal, local mean-variance and ambiguity risk pricing and hedging for an insurance payment process,
2. *15th Insurance: Mathematics and Economics Conference*, Triest, 2011: No-good-deal, local mean-variance and ambiguity risk pricing and hedging for an insurance payment process,

3. *Actuarial and Financial Mathematics Conference*, Bruksela, 2011: Applications of time-delayed backward stochastic differential equations to pricing, hedging and management of financial and insurance risks,
4. *14th Insurance: Mathematics and Economics Conference*, Toronto, 2010: Applications of time-delayed backward stochastic differential equations to pricing, hedging and management of financial and insurance risks,
5. *5th Advanced Mathematical Methods for Finance Conference*, Lublana, 2010: Time-delayed backward stochastic differential equations: the theory and applications to finance and insurance,
6. *13th Insurance: Mathematics and Economics Conference*, Stambuł, 2009: Optimal investment strategies for an index-linked payment process,
7. *11th Insurance: Mathematics and Economics Conference*, Pireus, 2007: Mean-variance optimization problems in an accumulation phase for a defined benefit plan,
8. *16th Actuarial Approach for Financial Risks Colloquium*, Sztokholm, 2007: Indifference pricing of a life insurance portfolio with systematic mortality risk in market driven by a Levy noise,
9. *2nd Advanced Mathematical Methods for Finance Conference*, Będlewo, 2007, referat plenarny wygłoszony przez C. Klüppelberg: Optimal investment and consumption in a Black-Scholes market with stochastic coefficients driven by a non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process,
10. *2nd Advance Mathematical Methods for Finance Conference*, Będlewo, 2007: Indifference pricing of a life insurance portfolio with systematic mortality risk in market driven by a Levy noise,
11. *36th Actuarial Studies in Non-life Insurance Colloquium*, Zurich, 2005: Optimal investment strategy for non-life insurance company: quadratic loss.

Wygłosiłem także dwa referaty, jako zaproszony prelegent, na seminariach w zagranicznych ośrodkach akademickich:

12. Maastricht University, 2012: No-good-deal, local mean-variance and ambiguity risk pricing and hedging for an insurance payment process,
13. Technische Universität Berlin, 2010: Applications of time-delayed backward stochastic differential equations to pricing, hedging and management of financial and insurance risks.

Chciałbym poinformować, że zostałem poproszony o wygłoszenie plenarnego referatu podczas sesji **Stochastic Models in Insurance** w czasie konferencji *1st German-Polish Joint Conference on Probability and Mathematical Statistics*, która odbędzie się w 2013 r.

9. Referaty wygłoszone na krajowych konferencjach naukowych

W maju 2012 r. wygłosiłem wykład plenarny, jako zaproszony prelegent, podczas „*XII Konferencji z Probabilistyki*” w Będlewie na temat: „Zastosowania wstecznych stochastycznych równań różniczkowych do wyceny kontraktów finansowych i ubezpieczeniowych”. Konferencja została zorganizowana przez Instytut Matematyczny PAN.

Przedstawiłem swoje wyniki na następujących konferencjach naukowych o zasięgu krajowym:

1. *VIII Konferencja „Zagadnienia Aktuarialne – teoria i praktyka”*, Warszawa, 2012: Metody wyceny kontraktów finansowych i ubezpieczeniowych,
2. *VI Konferencja „Zagadnienia Aktuarialne – teoria i praktyka”*, Wrocław, 2010: Zastosowania wstecznych stochastycznych równań różniczkowych z opóźnieniem w ubezpieczeniach i finansach,
3. *V Konferencja „Zagadnienia Aktuarialne – teoria i praktyka”*, Warszawa, 2009: Wsteczne stochastyczne równania różniczkowe i ich zastosowania w ubezpieczeniach i finansach,
4. *IV Konferencja „Zagadnienia Aktuarialne – teoria i praktyka”*, Warszawa, 2008: Optymalna strategia inwestycyjna dla procesu wypłat zależnego od indeksu finansowego,
5. *III Konferencja „Zagadnienia Aktuarialne – teoria i praktyka”*, Wrocław, 2007: Optymalne strategie inwestycyjne dla planów emerytalnych,
6. *XXXIV Konferencja Zastosowań Matematyki*, Zakopane, 2005: Wycena polisy ubezpieczeń na życie z wykorzystaniem funkcji użyteczności,
7. *I Konferencja „Zagadnienia Aktuarialne – teoria i praktyka”*, Wrocław, 2005: Optymalna strategia inwestycyjna dla zakładu ubezpieczeń majątkowych.

W październiku 2012 r. wygłoszę referat jako zaproszony prelegent podczas III Forum Aktuariuszy, które odbędzie się w Warszawie.

Lukasz Delong