

Autoreferat osiągnięć naukowo-badawczych i zawodowych

1. Wstęp

Celem autoreferatu jest zaprezentowanie mojego dorobku naukowego po uzyskaniu tytułu doktora nauk matematycznych w 1994 r. na University of Bristol, Anglia. W punkcie drugim przedstawiam przebieg swojej kariery naukowej i zawodowej. Część trzecia poświęcona jest omówieniu jednotematycznego cyklu dziesięciu publikacji, stanowiącego podstawę do ubiegania się o tytuł doktora habilitowanego w dziedzinie ekonomii.

2. Przebieg kariery naukowej i zawodowej

2.1 Podstawowe informacje

Imiona i nazwisko: David Mark Ramsey

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie statystyki uzyskany w roku 1994 w Instytucie Matematyki, University of Bristol, Wielka Brytania; rozprawa doktorska *Evolution, Learning and Interaction in Sequential Decision Processes*.

Dyplom ukończenia studiów wyższych inżynierskich (*1st class honours*) z matematyki w roku 1990 w Instytucie Matematyki, University of Bristol, Wielka Brytania. Specjalizacja: optymalizacja i statystyka.

Zatrudnienie

10/2012- Wydział Informatyki i Zarządzania, Politechnika Wroclawska; stanowisko: adiunkt w Zakładzie Badań Operacyjnych i Zastosowań Informatyki,

9/2006-9/2012 Department of Mathematics and Statistics, University of Limerick, Irlandia; stanowisko: adiunkt w Zakładzie Statystyki

10/2000-9/2006 Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wroclawska; stanowisko: adiunkt w Instytucie Matematyki i Informatyki (do roku 2005 Instytut Matematyki).

10/1996-9/2000 Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wroclawska; stanowisko: asystent w Instytucie Matematyki.

1/1995-8/1995 Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Anglia; stanowisko: wykładowca w Zakładzie Statystyki

* 10/1995-9/1995 Byłem stypendystą Polskiego Instytutu Kultury w Instytucie Matematyki, Politechnika Wroclawska

2.2 Opis przebiegu kariery naukowej i zawodowej

Dzienne studia inżynierskie z matematyki ukończyłem w Instytucie Matematyki University of Bristol w Wielkiej Brytanii w roku 1990. Na ostatnich latach studiów moje kursy wybieralne były z matematyki stosowanej, szczególnie optymalizacji i statystyki. To wywarło istotny wpływ na moje dalsze zainteresowania naukowe, mianowicie zastosowania matematyki w ekonomii oraz biologii.

W październiku 1990 r. podjąłem studia doktoranckie w tym samym instytucie w Zakładzie Statystyki pod kierunkiem prof. Johna McNamary oraz dr. Edmunda Collinsa. Tematem mojej pracy doktorskiej były decyzje sekwencyjne przy niepewności i konkurencji (tytuł pracy: *Evolution, Learning and Interaction in Sequential Decision Processes*). W pracy korzystałem z różnych metod stosowanych w badaniach operacyjnych, szczególnie z teorii gier oraz programowania dynamicznego, aby zbadać modele oparte na klasycznym modelu typu „job search”, czyli poszukiwania pracy (w ekonomii oraz biologii model ten też jest znany jako model „wyboru partnera”). W tym czasie prowadziłem ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyki. Pracę doktorską obroniłem w roku 1994. Recenzentem była pani prof. Patsy Haccou (University of Leiden, Niderlandy). Dwa artykuły, które później ukazały się w renomowanych czasopismach międzynarodowych, rozwinęły tematy z pracy doktorskiej. Pierwszy, *Learning rules for optimal selection in a varying environment: mate choice revisited* (Behavioral Ecology), rozwinął tematy z przedostatniego rozdziału pracy, który dotyczył decyzji sekwencyjnych przy niepewności a drugi, *A large population game theoretic model of job-search with discounting* (International Game Theory Review) był rozwinięciem ostatniego rozdziału mojej pracy doktorskiej, który dotyczył teorii gier. Prace te dotyczyły problemu typu „job search”, który stanowi bardzo istotną część moich badań w zakresie teorii gier i jej zastosowań w dziedzinie ekonomii.

Od stycznia do września roku 1995 pracowałem w Instytucie Matematyki na University of Bath jako wykładowca statystyki. Prowadziłem zajęcia z analizy szeregów czasowych, statystyki dla biologów oraz statystyki nieparametrycznej. W tym samym roku dostałem roczne stypendium od Polskiego Instytutu Kultury, w ramach którego przyjechałem do Polski, gdzie podjąłem współpracę z Prof. Krzysztofem Szajowskim w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej. Z tej współpracy wyniknął szereg prac o teoriogrowych modelach opartych na problemie „job search”, które się ukazały w czasopismach krajowych oraz międzynarodowych. Najważniejsze z tych prac to: *Randomized stopping times in Dynkin Games*. (ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics), oraz *Selection of a correlated equilibrium in Markov stopping games* (European Journal of Operational Research). Obie te prace rozważają grę gdzie dwaj gracze („pracodawcy”) obserwują ciąg kandydatów i muszą zatrudnić jednego. W pierwszej pracy obaj pracodawcy ściśle konkurują z sobą. Praca ilustruje fakt że gdy istnieje choćby najprostsz rynek, optymalna decyzja pojedynczego gracza może zależeć od decyzji innych graczy (w klasycznym modelu optymalna decyzja gracza jest zawsze jednoznacznie określona). Druga z tych prac rozważa grę gdzie gracze (pracodawcy) są dwoma wydziałami tej samej organizacji. Więc, chociaż istnieje pewien poziom konkurencji między tymi graczami, mają oni wspólne interesy. W tym przypadku gracze mogą się komunikować, aby osiągnąć tak zwaną równowagę skorelowaną.

Brałem udział w seminarium prof. Krzysztofa Szajowskiego, gdzie rozważano różne zastosowania probabilistyki i teorii gier do ekonomii oraz ochrony środowiska. Na przełomie wieków zacząłem uczęszczać na seminarium prof. Witolda Kloneckiego,

gdzie przedmiotem zainteresowań była statystyka stosowana, w szczególności statystyka genetyczna. Dzięki temu, nawiązałem kontakt z Prof. Marią Sasiadek, która jest kierowniczką Zakładu Genetyki Akademii Medycznej we Wrocławiu. Współpraca ta wciąż trwa i jej wynikiem jest cykl prac dotyczący onkologii genetycznej. W ramach tego seminarium nawiązałem też kontakt z prof. Andreasem Futschikiem z Uniwersytetu Wiedeńskiego. W wyniku tego, byłem profesorem wizytującym na tamtejszej uczelni, gdzie prowadziłem wykłady ze statystyki genetycznej dla studentów studiów magisterskich w r. 2005 i w r. 2007. Innym wynikiem tej współpracy było kilka prac dotyczących analizy statystycznej danych z sekwencera genomu, przede wszystkim *DNA pooling and statistical tests for the detection of single nucleotide polymorphisms* (Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology). Jednocześnie zacząłem samodzielną pracę nad teoriogrowymi wersjami problemów typu „job search”. Z tej pracy wynikły następujące artykuły: *Correlated equilibria in n-player stopping games* (Scientiae Mathematicae Japonicae), który rozszerzył teorię dotyczącą równowag skorelowanych w grach stopowania do gier z n graczami (pracodawcami), *A model of a 2-player stopping game with priority and asynchronous observation* (Mathematical Methods of Operations Research), który rozważał model, w którym jeden z graczy nie ma pełnej informacji dotyczącej wartości kandydatów, ale najważniejszym artykułem z tego okresu była praca pod tytułem *A large population job search game with discrete time* (European Journal of Operational Research). Praca ta jest częścią cyklu prac o modelach teoriogrowych z kontinuum graczy. Modele takie są używane w dziedzinie ekonomii gdzie rynki zwykle składają się z dużej liczby graczy. Często żaden pojedynczy gracz nie ma wpływu na stan rynku, ale zachowanie się całej populacji ma na niego istotny wpływ. Praca ta rozważa model sezonowego rynku, gdy kontinuum graczy (np. pracobiorców) szuka pewnego zasobu (np. posad). Założono że rozkład wartości posad jest znany. Gdy gracz przyjmuje posadę, i gracz i posada znikają z rynku. Więc w trakcie poszukiwania rozkład wartości dostępnych prac się zmienia w zależności od strategii używanych przez graczy.

Pracując w Instytucie Matematyki (później instytut został przemianowany na Instytut Matematyki i Informatyki), prowadziłem zajęcia z szerokiego zakresu przedmiotów, m. in. rachunku prawdopodobieństwa, statystyki oraz teorii gier. Moje propozycje tematów prac dyplomowych zawsze były popularne. Byłem promotorem ok. 30 prac dyplomowych z matematyki informatycznej, głównie z zastosowania teorii gier i statystyki. Następujące tematy były rozważone w tych pracach: ewolucja kooperacji, ewolucja agresji, growe modele konkurencji między firmami. W dodatku, byłem promotorem 3 prac magisterskich z matematyki. Jedna z tych prac rozwinęła pojęcia z artykułu *Selection of a correlated equilibrium in Markov stopping games* (wymienionego powyżej). Praca ta zakładała że gracze nie tylko mogli się komunikować, ale wypłaty uboczne też były dozwolone. Należy traktować taką grę jako grę kooperacyjną. Aby zdefiniować rozwiązanie takiej gry, należy określić odpowiednią wartość gry (np. wartość Shapley'a) a potem wyznaczyć profil strategii, który pozwala zrealizować tę wartość. Praca magisterska była podstawą artykułu *Cooperative strategies in stopping games* (Annals of the International Society of Dynamic Games).

W czasie mojej pracy w Instytucie Matematyki opracowałem programy dla różnych kursów, m. in. z rachunku prawdopodobieństwa, statystyki oraz teorii gier. W połowie pierwszej dekady nowego wieku zacząłem prowadzić zajęcia z teorii gier dla studentów na ostatnim roku studiów magisterskich. Zajęcia te okazały się, w pewnym sensie, moim pierwszym kursem autorskim, skoro miałem dużo swobody przy ich układaniu. W ramach tych zajęć rozważałem także zastosowania w ekonomii i w

polityce. W roku 2003 zostałem wybrany do Rady Instytutu jako przedstawiciel nauczycieli niesamodzielnych.

We wrześniu r. 2006 zacząłem pracować w Department of Mathematics and Statistics, University of Limerick, w Irlandii. Prowadziłem zajęcia z rachunku prawdopodobieństwa, statystyki oraz badań operacyjnych. Podczas mojego sześcioletniego pobytu mocno zaangażowałem się w pracy administracyjnej. W r. 2007 byłem współorganizatorem dwóch konferencji. Jedną była krajowa: *Conference on Applied Statistics in Ireland (CASI - coroczna konferencja stowarzyszenia „the Irish Statistical Association”)* a druga była międzynarodową: *Workshop on Correlated Data Modelling (WCDM)*. Od r. 2008 do r. 2012 byłem dyrektorem kierunku „*Economics and Mathematical Sciences*”. W tej roli wprowadziłem bardzo istotne zmiany programowe, które przedstawiłem i uzasadniłem przed władzami uczelni. Wcześniej studenci z tego kierunku nie mogli uczęszczać na zajęcia z badań operacyjnych (metody z tej dziedziny są często stosowane w ekonomii matematycznej). Prowadziłem dwa kursy z badań operacyjnych. Pierwszy dotyczył programowania liniowego i teorii decyzji. Drugi kurs był programem autorskim, który rozważał procesy decyzyjne oraz teorię gier. Zmieniłem oryginalny program, aby go dostosować do potrzeb studentów z kierunków „*Economics and Mathematical Sciences*” oraz „*Financial Mathematics*” (m. in. program zawierał zastosowania teorii gier w ekonomii). W ramach roli dyrektora kierunku byłem przewodniczącym rady kierunku, która się składała z nauczycieli akademickich z instytutów matematyki i ekonomii oraz studentów. Byłem też doradcą studentów w zakresie ich studiów oraz dalszej kariery. Od r. 2008 do r. 2012 byłem reprezentantem wydziału „*Science & Engineering*” na radzie Wydziału Biznesu (który m. in. obejmował Instytut Ekonomii).

Dzięki nowym kontaktom wynikającym z pracy administracyjnej, rozwinąłem zakres moich badań międzydyscyplinarnych, szczególnie w dziedzinie ekonomii. W tym czasie współpracowałem z dr. Stephenem Kinsellą, z Instytutu Ekonomii. Wynikiem tej współpracy były dwa artykuły: *A Model of Partnership Formation with Friction and Multiple Criteria* (in *Search Theory: A Game Theoretic Perspective*) oraz *The Optimal Incidence of Taxation in Coupled Markets* (przedstawiony na konferencji „*Irish Economic Association Annual Conference*”). Pierwsza praca należy do cyklu prac poświęconych growym modelom typu „*job search*”. Najważniejszym artykułem w tej dziedzinie z tego okresu, którego byłem samodzielnym autorem, była praca pod tytułem *Partnership formation based on multiple traits* (*European Journal of Operational Research*). Praca ta rozważa grę, w której gracze (pracodawcy i pracownicy) najpierw otrzymują sygnał od potencjalnego partnera (np. może to być podanie pracownicy na dane stanowisko). W oparciu o ten sygnał gracz musi zdecydować czy chce podjąć dalsze rozmowy czy nie. Po takiej rozmowie dana para składająca się z pracownicy i pracodawcy musi zdecydować czy zostać partnerami (czyli pracodawca zatrudni pracownicę) czy nie. Praca *Mutual mate choice with multiple criteria* (*Annals of the International Society of Dynamic Games*) rozważała podobną grę (w tym artykule cechy graczy są dyskretne i równowaga jest wyznaczona za pomocą algorytmu a nie za pomocą odpowiedniego równania różniczkowego). W tym czasie zacząłem współpracować z prof. Steve'm Alpernem (wtedy z Zakładu Badań Operacyjnych na London School of Economics, obecnie Profesorem Badań Operacyjnych na Warwick Business School). Wynikiem tej pracy było kilka artykułów o modelach gier z continuum graczy typu „*job search/mate choice*”, które były nowatorskie pod takim względem, że cechy/wartości graczy nie były ustalone, ale się zmieniały w czasie według odpowiedniego procesu. Uwzględnia to fakt, że np. wartość pracownicy może się zmienić w czasie, bo może on zostać bardziej doświadczonym

lub nauczyć się nowych zdolności. Najważniejszą z tych prac jest *Partnership formation with age-dependent preferences* (European Journal of Operational Research). Inne prace w tym cyklu to: *Equilibrium population dynamics when mating is by mutual choice based on age* (Theoretical Population Biology) oraz mój artykuł samodzielnie napisany *Some generalizations of a mutual mate choice problem with age preferences* (Annals of the International Society of Dynamic Games). Jednocześnie pracowałem nad innymi grami z kontinuum graczy. Praca *Large population evolutionary games played within a life history framework* (Operations Research and Decisions) rozważa model takiej gry, gdzie gracz przechodzi przez różne stany z intensywnością zależną od swojej strategii. W pewnych stanach spotyka innych graczy i dostaje wypłatę zależną od profilu strategii używanych przez tych graczy. W najprostszych wersjach tej gry ani cechy ani „długość życia gracza” (czyli ile czasu gracz spędza w tej grze) nie zależą od jego strategii. W tym przypadku, gracz powinien zmaksymalizować intensywność wypłat. Praca *Strategy dependent mortality in life history games* (Proceedings of the 2009 International Conference on Game Theory for Networks) rozważa grę, gdzie długość życia gracza zależy od jego strategii. W tym przypadku gracz powinien zmaksymalizować swoją (możliwie dyskontowaną) sumę wypłat. Praca *A large population parental care game: polymorphisms and feedback between patterns of care and the operational sex ratio* (Journal of Theoretical Biology) przedstawia zastosowanie tej teorii do biologii ewolucyjnej. Planuję że w przyszłości zastosuję teorię tam opisaną do modelowania dynamiki rynków pracy.

Od r. 2007 do r. 2012 byłem członkiem zespołu „BIO-SI”, który składał się z czterech naukowców, dwóch z University of Limerick (drugim był prof. Gilbert MacKenzie) oraz dwóch z National University of Ireland, Galway (prof. John Hinde oraz dr John Newell). W r. 2008 zespół ten dostał grant od „Science Foundation Ireland” o wartości €500 000, aby rozwijać modele statystyczne stosowalne w biologii i medycynie. W ramach tego grantu, byłem promotorem pracy doktorskiej mgr. Ali Sheikhi Mehrabadi pod tytułem „Statistical Methods for the Detection of Single Nucleotide Polymorphisms (SNPs) Using New Generation Genome Sequencers”. Praca ta została obroniona w lutym 2014. W tym czasie byłem też głównym organizatorem konferencji *Symposium on Biostatistics and Statistical Genetics*, która odbyła się w Limerick we wrześniu r. 2009.

W „Department of Mathematics and Statistics” działał też zespół badawczy MACSI (Mathematical Consortium for Science and Industry). Zespół ten był powołany przez „Science Foundation Ireland”, aby współpracować z przemysłem oraz naukowcami z innych dziedzin. W ramach tego zespołu byłem jednym z promotorów (razem z Prof. Jamesem Gleesonem, który był głównym promotorem oraz dr. Johnem Kinsellą) pracy doktorskiej dr. Mela Devine. Badania te zostały wykonane przy współpracy z firmą „Bord Gais”. Razem z dr. Devine, byłem odpowiedzialny za statystyczny opis popytu na gaz, ekonometryczny model rynku oraz interpretacje wyników. Niektóre wyniki z tej pracy zostaną opublikowane w pracy *A Rolling Optimisation Model of the UK Natural Gas Market*, która została przyjęta do druku w czasopiśmie „Networks & Spatial Economics”. Praca ta rozważa problem firmy, która chce wyznaczyć optymalną strategię dostarczania gazu klientom. Przede wszystkim należy zdecydować kiedy kupić oraz u kogo (gdy popyt jest niższy wiosną i latem można kupić gaz przy niskiej cenie i go magazynować, aby zaspokoić wysoki popyt zimą, choć magazynowanie też ma swoje koszty). W tej pracy najpierw określono model opisujący popyt na gaz w UK i w oparciu o to wyznaczono optymalną strategię. Wcześniej współpracowałem też z inną firmą irlandzką, mianowicie opracowałem program komputerowy, który pomagał przy kontroli zapasów magazynowych.

W r. 2011 zostałem promotorem pracy doktorskiej mgr. Any Marii Magdalina pod tytułem *A Bayesian Approach to Regime Changes in Multiple Linear Regression*. Praca ta zastosuje metodę „Monte Carlo” łańcuchów Markowskich (MCMC), aby zbadać gdzie lub kiedy zmiany w pewnym procesie fizycznym lub ekonomicznym zachodzą. Byłem w tym czasie promotorem jednej pracy magisterskiej napisanej przez mgr Muriel Tronc, studentkę informatyki matematycznej z programu „Erasmus”. W Pracy tej rozważano algorytmy wyznaczające równowagi gier typu „job search”. W dodatku byłem promotorem ok. 10 prac dyplomowych studentów, w większości z kierunków „*Financial Mathematics*” i „*Economics and Mathematical Sciences*”. Wśród tematów były następujące zagadnienia: konkurencja i kolaboracja, teoria gier i zmiana klimatu oraz pochodne pogodowe.

W lipcu 2007 uczestniczyłem w konferencji *European Conference on Operational Research* w Pradze. Na tej konferencji spotkałem Prof. Jacka Mercika (z Wydziału Informatyki i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej, gdzie obecnie pracuję). Spotkanie to było początkiem naszej współpracy. W ramach tej współpracy byłem jednym z organizatorów konferencji *SING4 Conference on Game Theory*, która odbyła się we Wrocławiu w czerwcu r. 2008. W r. 2010 zostałem redaktorem czasopisma *Operations Research and Decisions* wydanego przez Politechnikę Wrocławską. W maju r. 2011 jako profesor wizytujący prowadziłem wykłady i ćwiczenia w języku angielskim na Wydziale Informatyki i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej. W r. 2012 zostałem redaktorem dwóch innych czasopism wydawanych w Polsce: *Matematyka Stosowana (Mathematica Applicanda)* oraz *Economic and Environmental Studies*.

W październiku r. 2012 podjąłem pracę jako adiunkt w Zakładzie Badań Operacyjnych i Zastosowań Informatyki na Wydziale Informatyki i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej. Prowadzę wykłady i laboratoria ze statystyki, ekonometrii i rachunku prawdopodobieństwa w dwóch językach (po polsku i po angielsku).

W r. 2013 uczestniczyłem w konferencji *26th European Conference on Operational Research*, gdzie byłem przewodniczącym sesji na temat gier poszukiwania (search games). W lipcu i sierpniu r. 2013 byłem stypendystą Niderlandzkiego Ministerstwa Edukacji, Kultury i Nauki na „University of Delft”, gdzie współpracowałem z prof. Robbertem Fokinkiem nad modelami gier poszukiwania. Jednocześnie w Polsce, razem z dr Ursulą Markowską-Przybyłą z Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, dostaliśmy grant MNiSW o wartości 300 000 zł. w dziedzinie ekonomii, którego celem było zbadanie poziomu zaufania społecznego wśród polskich studentów za pomocą gier eksperymentalnych. Eksperymenty te zostaną przeprowadzone w bieżącym roku. Poziom zaufania społecznego jest bardzo istotną składową kapitału społecznego, który jest potrzebny w procesie budowania sprawnej gospodarki rynkowej. W ramach tego projektu, niedawno złożyliśmy pracę pod tytułem „*A Game Theoretical Study of Generalized Trust and Reciprocation in Poland: I. Theory and Experimental Design*” do czasopisma „*Operations Research and Decisions*”. W r. 2013 uczestniczyłem w trzech krajowych konferencjach ekonomicznych: *Innovations for and Transitions to Sustainable Transport Systems*, 12 kwietnia, Wyższa Szkoła Bankowa we Wrocławiu, gdzie byłem przewodniczącym sesji, *Conference on Sustainable Business and Transitions for Sustainable Development*, 20-22 czerwca, Uniwersytet Opolski, gdzie wygłosiłem referat pod tytułem *Land Transport Policy in Ireland and Poland: A Game Theorist's View* (artykuł pod tym samym tytułem ukaże się w *Zeszytach Naukowych WSB we Wrocławiu*), oraz *Aktualne Aspekty Polityki Społeczno-Gospodarczej i Przestrzennej*, 23-25 września, Jelenia Góra-Cieplice, gdzie wygłosiłem referat pod tytułem *Waloryzacja*

nieruchomości mieszkalnej na wtórnym rynku we Wrocławiu (artykuł pod tym samym tytułem ukaże się w *Pracach Naukowych UE we Wrocławiu*). Fakty te pokazują że jestem szanowanym badaczem w skali międzynarodowej oraz aktywnym uczestnikiem środowiska ekonomicznego w Polsce.

3. Jednotematyczny cykl publikacji

Osiągnięcie naukowe stanowi **cykl dziesięciu jednotematycznych publikacji** dotyczących gier dynamicznych, w szczególności modeli typu “poszukiwania pracy”. Dziewięć z tych prac ukazało się w recenzowanych czasopismach naukowych, w tym jedna ukazała się w czasopiśmie polskim a reszta w renomowanych czasopismach międzynarodowych (sześć jest na liście filadelfijskiej). Pozostała praca ukazała się jako recenzowany rozdział książki wydanej przez wydawnictwo międzynarodowe *Springer*. Na rzeczony cykl publikacji tworzący logiczną całość składają się następujące opracowania (według kolejności opisu w autoreferacie)¹:

1. Collins, E.J., McNamara, J.M., Ramsey, D.M. (2006) *Learning rules for optimal selection in a varying environment: mate choice revisited*. Behavioral Ecology, 17(5): 799-809.
2. Neumann, P., Ramsey, D., Szajowski, K. (2001) *Randomized stopping times in Dynkin Games*. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 82: 811-819.
3. Ramsey, D.M. (2007) *A model of a 2-player stopping game with priority and asynchronous observation*. Mathematical Methods of Operations Research, 66(1): 149-164.
4. Ramsey, D.M., Szajowski, K. (2008) *Selection of a correlated equilibrium in Markov stopping games*. European Journal of Operational Research, **184**: 185-206.
5. Ramsey, D.M. (2008) *A large population job search game with discrete time*. European Journal of Operational Research, **188**(2): 586-602.
6. Ramsey, D.M. (2009) *A large population game theoretic model of job-search with discounting*. International Game Theory Review, 11(3): 301-320.
7. Ramsey, D.M. (2012) *Partnership formation based on multiple traits*. European Journal of Operational Research, **216**: 624-637.
8. Kinsella S., Ramsey D.M. (2013) *A Model of Partnership Formation with Friction and Multiple Criteria*. In: Alpern S., Fokkink R., Gąsieniec L., Lindelauf R., Subrahmanian V.S. (eds.), *Search Theory: A Game Theoretic Perspective*, s. 267-293. Springer Science & Business, New York.
9. Alpern, S., Katrantzi, I., Ramsey, D.M. (2013) *Partnership formation with age-dependent preferences*. European Journal Of Operational Research, **225**: 91-99.

¹ Część projektów badawczych realizowana była ze współautorami. Opis podziału zadań w tych pracach przedstawiam w Załączniku 6.

10. Ramsey D. M. (2009) *Large population evolutionary games played within a life history framework*. *Operations Research and Decisions* 7(2): 51-74.

Wszystkie te prace korzystają z teorii decyzji sekwencyjnych i poza pierwszą rozważają modele gier dynamicznych. Są one modelami typu „poszukiwania zasobów”, które są zastosowane w ekonomii, zwłaszcza do modelowania rynku pracy.

Stigler G. J. (1961) był pierwszym autorem, który rozważał model tego typu. Założył że klient szuka pewnego jednolitego dobra, które jest dostępne w dużej liczbie sklepów. Klient nie ma informacji o cenie w danym sklepie, ale zna rozkład cen. Zwiedza on sklepy w losowej kolejności (czyli obserwowane ceny są niezależnymi realizacjami z rozkładu cen) i przy zwiedzaniu danego sklepu musi zdecydować czy ma kupić to dobro po obowiązującej cenie (i w ten sposób skończyć ten proces) czy ma szukać dalej. Celem klienta jest kupno tego dobra jak najniższym kosztem, gdzie koszt ten jest sumą ceny dobra i kosztów poszukiwania (założono że koszty poszukiwania są proporcjonalne do liczby sklepów odwiedzonych). Model ten prowadzi do problemu optymalnego stopowania, gdzie przy optymalnej strategii klient kupuje dobro w pierwszym sklepie, gdzie cena nie przekracza odpowiedniego progu. Próg ten równa się jego oczekiwanym kosztom z dalszych poszukiwań. Według tego modelu, fakt że istnieją różne ceny na rynku wynika z tego, że różni klienci mają różne koszty poszukiwania.

W dziedzinie ekonomii model tego typu też jest często używany, aby opisać rynek pracy (model typu „poszukiwania pracy”). W klasycznym modelu tego typu, pracobiorca obserwuje ciąg ofert pracy o wartościach ze znanego rozkładu i pracodawcy nie są wybredni. Gdy pracobiorca chce przyjąć ofertę, zostanie zatrudniony i przestanie szukać. Ten klasyczny model prowadzi do problemu optymalizacji, w którym rozkład wartości posad nie zależy od zachowania innych graczy na rynku pracy i jest znany wszystkim poszukiwaczom. W biologii analogiczny model jest używany w teorii wyboru partnera, gdy tylko jedna z płci jest wybredna. Prace w tym cyklu rozważają modele, które mają słabsze założenia.

Pierwsza praca *Learning rules for optimal selection in a varying environment: mate choice revisited* rozważa model, w którym (w języku rynku pracy) pracobiorcy nie znają rozkładu wartości posad, który nie zmienia się w czasie, i zbierają informacje dotyczące tego rozkładu podczas poszukiwania. Założono, że pracobiorca może zobaczyć dowolną liczbę ofert. Korzystając z podejścia bayesowskiego, przy optymalnej strategii należy przyjąć posadę, gdy jej wartość przekracza pewien próg, który jest określony względem aktualnego estymatora średniej wartości posad i w trakcie poszukiwania maleje do pewnej asymptotycznej wartości. Wynika z tego, że optymalnie zachowujący się pracobiorca, który już odrzucił dużą liczbę posad, a więc zna rozkład wartości, używa stałego progu. Postać tej strategii wynika z balansowania potrzeby na informacje dotyczące rozkładu wartości posad ze stratami ponoszonymi, gdy dobra posada zostanie odrzucona. Przy założeniach klasycznego modelu możliwość powrotu do posady, która została wcześniej odrzucona, nie ma wpływu na postać optymalnej strategii. Wynika to z faktu że według klasycznego modelu optymalna strategia jest wyznaczona poprzez stały próg, więc jeśli posada została odrzucona w przeszłości, wciąż należy ją odrzucić. Gdy rozkład wartości posad jest nieznan, możliwość powrotu ma wpływ na optymalną strategię, skoro przy optymalnej strategii zastosowany próg zmienia się w czasie. Na przykład, zakładamy że pracobiorca początkowo myśli, że rynek jest lepszy niż w rzeczywistości. W tym przypadku, gdy pierwsza posada zaobserwowana (o wartości x) jest względnie dobra, pracobiorca może ją odrzucić, a później po obserwacji kilku gorszych posad przyjąć

posadę o wartości x . W tej pracy rozważamy model, w którym nie ma możliwości takiego powrotu. Aby wyznaczyć optymalną strategię za pomocą podejścia bayesowskiego, należy założyć że pracobiorca ma odpowiedni *a priori* estymator średniej wartości posad oraz estymator wariancji tego estymatora względem wariancji wartości posad. W praktyce te aprioryczne estymatory mogą być nieodpowiednie. Więc praca ta rozważa efektywność strategii nie uczących się (strategie te używają stałego proggu) oraz prostych strategii uczących się (strategie te używają ustalonego proggu względem aktualnego estymatora średniej wartości posad). Strategie uczące się są bardzo efektywne, gdy istnieje duża niepewność dotycząca średniej wartości posad oraz wariancja wartości posad jest duża. W tym przypadku strategie, które na początku przeszacują średnią wartość posad i używają ustalonego proggu względem aktualnego estymatora średniej wartości posad, mają podobne własności do optymalnej strategii przy podejściu bayesowskim (przy takiej prostej strategii uczącej się, estymator średniej wartości posad jest początkowo większy niż przy podejściu bayesowskim, ale maleje szybciej gdy pracobiorca nie znajdzie odpowiedniej posady). Jeśli zakładamy że młody pracobiorca używa średniej wartości wszystkich posad na rynku jako estymatora średniej wartości posad mu dostępnych i prawdopodobieństwo, że pracodawca go zatrudnia maleje względem wartości posad, strategia taka może dobrze odzwierciedlać strategię młodego pracobiorcy. Wynika to z faktu, że podczas poszukiwania pracobiorca ten prawdopodobnie szybko obniży swój estymator średniej wartości posad mu dostępnych.

W rzeczywistości, pracobiorcy (i pracodawcy) konkurują ze sobą i obie klasy graczy są wybredne. Więc wartości pracobiorców i posad na rynku pracy zależą od strategii używanych zarówno przez pracobiorców jak i pracodawców. Więc można rozważać problem poszukiwania pracy jako grę, w której gracze należą do pewnej populacji. W populacji tej istnieją dwie klasy graczy (pracodawcy i pracobiorcy). Każdy gracz ma określoną wartość. Z punktu widzenia pracodawcy, obserwuje on sekwencję pracobiorców i zatrudnia pierwszego, przy którym jest wzajemna akceptacja. Wtedy pracodawca (i pracobiorca) przestaje szukać. Wypłata pracodawcy równa się wartości pracobiorcy zatrudnionego pomniejszonej o koszty poszukiwania ponoszone przez pracodawcę. Problem pracobiorcy jest analogiczny. Wypłata jego równa się wartości jego posady (pracodawcy) pomniejszonej o jego koszty poszukiwania. Odpowiednim pojęciem rozwiązania takiej gry jest równowaga Nasha. Przy takiej równowadze żaden gracz nie może uzyskać większej wypłaty oczekiwanej poprzez jednostronną zmianę strategii.

Należy odnotować, iż zakładamy że gracze działają niezależnie od siebie (czyli nie ma komunikacji). Może istnieć wiele równowag Nasha pewnej gry. Na przykład, rozważmy następującą prostą grę, w której są tylko dwaj pracodawcy (jeden dobry, jeden zły) i dwaj pracobiorcy (jeden dobry, jeden zły). Zakładamy że koszty poszukiwania są minimalne, i obaj pracodawcy wolą dobrego pracownika od złego i wolą złego pracownika od żadnego. Analogicznie, obaj pracobiorcy wolą dobrą posadę od złej posady i wolą złą od żadnej. Następujący profil strategii stanowi równowagę Nasha: i) dobry pracodawca przyjmuje tylko złego pracobiorcę, ii) zły pracodawca przyjmuje tylko dobrego pracobiorcę, iii) dobry pracobiorca przyjmuje tylko złego pracodawcę, oraz iv) zły pracobiorca przyjmuje tylko dobrego pracodawcę. Należy zauważyć, że przy takiej równowadze, dobry pracodawca zatrudnia złego pracownika a zły pracodawca zatrudnia dobrego pracownika, więc zły pracodawca i zły pracobiorca dostają swoją maksymalną wypłatę. Dobry pracodawca dostałby większą wypłatę, gdyby mógł zatrudnić dobrego pracobiorcę, tylko że przy jednostronnej zmianie strategii pracobiorca ten nie przyjąłby go. Podobnie, dobry pracobiorca dostałby

większą wypłatę, gdyby się zatrudnił u dobrego pracodawcy, tylko że przy jednostronnej zmianie strategii pracodawca ten nie zatrudniłby go. W rzeczywistości, taka równowaga nie jest ekonomicznie racjonalna, skoro każdy pracodawca byłby gotów zatrudnić najlepszego kandydata dla danej posady. Żeby rozwiązanie takiej gry spełniło ten warunek, wymagamy, aby w równowadze każdy gracz przyjmował potencjalnego partnera, którego wartość przekracza oczekiwaną wypłatę tego gracza z dalszych poszukiwań (nie biorąc pod uwagę kosztów już ponoszonych). W swoim klasycznym modelu poszukiwania pracy, gdzie obie strony (pracodawcy i pracownicy) są wybredni, Collins i McNamara [1990] nazwali ten warunek „kryterium optymalności”.

Następne trzy prace dotyczą modeli gry, w których są dwaj pracodawcy, którzy wspólnie obserwują ciąg pracobiorców i pokazują że nawet na najprostszycy rynkach pracy może istnieć kilku różnych równowag. Założono że pracownicy nie są wybredni, czyli przyjmują każdą ofertę pracy. Celem pracy *Randomized stopping times in Dynkin Games* jest opis równowagi, gdy dwaj pracodawcy konkurują ze sobą. Wspólnie obserwują ciąg kandydatów na stanowisko np. informatyka, których wartości (przy wartościach poprzednich kandydatów) mają znany rozkład. Gdy tylko jeden pracodawca chce zatrudnić kandydata, go zatrudnia i przestaje szukać a drugi pracodawca kontynuuje obserwacje kandydatów, aż zatrudni jednego. Gdy obaj pracodawcy chcą zatrudnić kandydata, zakładamy że pierwszy dostanie tego kandydata z prawdopodobieństwem p (a drugi szuka dalej). Inaczej, (czyli z prawdopodobieństwem $1-p$) drugi dostanie tego kandydata a pierwszy kontynuuje. Zakładamy że żaden z tych pracodawców nie ma absolutnego priorytetu (czyli $0 < p < 1$). W takich grach, gdy pracodawcy obserwują bardzo dobrego kandydata, obaj chcą go zatrudnić (bo niezależnie od decyzji drugiego pracodawcy, opłaca się przyjąć takiego kandydata), a gdy pracownicy obserwują złego kandydata, żaden nie chce go zatrudnić (bo niezależnie od decyzji drugiego pracodawcy, opłaca się odrzucić takiego kandydata). Istnieje niepewność dotycząca optymalnej decyzji, gdy pojawia się względnie dobry kandydat. W tym przypadku dany pracodawca wolałby żeby drugi zatrudnił kandydata i wtedy pierwszy mógłby dalej szukać bez konkurencji. Ale najgorsza sytuacja zachodzi wtedy, gdy obaj pracodawcy odrzucają takiego kandydata. W takich sytuacjach są trzy równowagi Nasha, dwie równowagi czyste, gdzie jeden pracodawca przyjmuje takiego kandydata a drugi nie, oraz trzecia równowaga, mieszana, gdzie obaj pracodawcy przyjmują kandydata z odpowiednim prawdopodobieństwem. Wyznaczono postać równowagi mieszanej oraz asymptotyczną postać tej równowagi, gdy celem obu pracodawców jest zatrudnienie najlepszego kandydata z wszystkich (jest to wersja growa znanego problemu sekretarki).

W pracy *A model of a 2-player stopping game with priority and asynchronous observation* rozważam podobną grę, w której jeden pracodawca zawsze ma priorytet, czyli obserwuje danego pracownika zanim drugi pracodawca może go zaobserwować. Więc jest to gra analogiczna do modelu Stackelberga konkurencji niedoskonałej. Wynika z tego że drugi gracz może mieć niepełną informację o wartościach poprzednich kandydatów. Praca ta wyznacza postać równowagi tej gry i za pomocą dwóch przykładów ilustruje jak struktura informacyjna tej gry wpływa na zachowanie się tych pracodawców.

Celem pracy *Selection of a correlated equilibrium in Markov stopping games* jest opis równowagi takiej gry, gdy dwaj pracodawcy są np. różnymi wydziałami tej samej organizacji i komunikacja między tymi wydziałami jest dozwolona. W tym przypadku, choć istnieje pewien stopień konkurencji między tymi wydziałami, mają

one też wspólne interesy. Gdy żaden wydział nie ma automatycznego priorytetu (czyli gdy $0 < p < 1$), może zachodzić konflikt, gdy się pojawia dosyć dobry, ale nie bardzo dobry, informatyk. W tym przypadku, tak jak powyżej, dany wydział wolałby żeby drugi wydział go zatrudnił. Ale najgorsza sytuacja dla obu wydziałów (i całej organizacji) zachodzi wtedy, gdy żaden z wydziałów nie zatrudnia takiego kandydata. W takich sytuacjach suma wypłat oczekiwanych przy równowadze mieszanej jest mniejsza niż przy obu równowagach czystych. Bez komunikacji nie ma naturalnego sposobu, aby uzgodnić, który wydział ma przyjąć takiego kandydata. W takich sytuacjach odpowiednim rozwiązaniem gry jest równowaga skorelowana. Przy takiej równowadze nigdy nie opłaca się żadnemu graczowi jednostronnie zmienić decyzji opartej na zgodzie wynikającej z komunikacji. Czyli podstawowa różnica między równowagą skorelowaną a równowagą Nasha jest taka, że przy równowadze skorelowanej decyzja jednego gracza może zależeć od decyzji drugiego poprzez ich komunikację, ale przy równowadze Nasha muszą podjąć swoje decyzje niezależnie od siebie. Skoro zbiór równowag skorelowanych zawiera zbiór równowag Nasha, wciąż istnieje problem wyboru odpowiedniej równowagi. Z drugiej strony, gdy istnieje możliwość komunikacji, gracze mogą wspólnie wybrać odpowiednią równowagę za pomocą odpowiedniego kryterium. W tej pracy rozważamy różne kryteria, które mogą być stosowane, aby osiągnąć zgodę. Na przykład, przy kryterium *utilitarian* gracze działają w taki sposób aby zmaksymalizować oczekiwaną sumę wypłat, a przy kryterium *egalitarian* grają w taki sposób, aby zmaksymalizować minimalną wypłatę oczekiwaną tych dwóch graczy. Aby wyznaczyć taką równowagę, należy rozwiązać ciąg odpowiednio zdefiniowanych problemów programowania liniowego. W dodatku rozważamy dwie różne sytuacje. W pierwszej, gracze mogą komunikować się tylko na początku gry (czyli zanim pierwszy kandydat się pojawi). W drugiej, gracze mogą komunikować się w każdym momencie gry (w szczególności, gdy dany kandydat się pojawia).

Następne dwie prace uwzględniają fakt że na rynku pracy jest i dużo pracobiorców i dużo posad. Praca *A large population job search game with discrete time* rozważa model, w którym rynek pracy jest sezonowy. Według tego modelu istnieje kontinuum pracodawców i pracobiorców. Pracodawcy nie są wybredni. Nowe posady pojawiają się tylko na początku sezonu i rozkład wartości tych posad jest znany. Posady są dostępne w momentach $1, 2, \dots, n$. Gdy liczba pracobiorców nie przekracza liczby posad, w momencie i , $1 \leq i \leq n$, każdy pracobiorca obserwuje posadę, której wartość pochodzi z rozkładu wartości posad jeszcze niezajętych. Gdy pracobiorca przyjmuje posadę, i posada i pracobiorca znikają z rynku pracy. W ten sposób rozkład wartości dostępnych posad się zmienia w czasie w zależności od strategii pracobiorców.

W klasycznym problemie poszukiwania pracy, rozkład wartości posad nie zmienia się w czasie. Przy takim założeniu można wyznaczyć optymalną strategię pracobiorcy za pomocą programowania dynamicznego. Korzystając z tego algorytmu, wyznaczamy rekurencyjnie odpowiedni próg (minimalną wartość akceptowalnej posady) dla danego momentu. W momencie n , pracobiorca powinien przyjąć jakąkolwiek posadę (bo później nie ma ofert). W momencie i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, pracobiorca powinien przyjąć posadę, o ile jej wartość przekracza oczekiwaną wypłatę z dalszych poszukiwań. Wypłata ta nie zależy od historii. Gdy rozkład wartości posad zmienia się w czasie, wciąż zachodzi kryterium optymalności, czyli należy przyjąć posadę w momencie i o ile wartość jej przekracza oczekiwaną wypłatę z dalszych poszukiwań. Natomiast, skoro nie znamy rozkładu wartości aktualnie dostępnych prac, bez znajomości strategii używanych przez pracobiorców w poprzednich momentach, nie możemy wyznaczyć równowagi tej gry rekurencyjnie. Równowagę można opisać za

pomocą wektora progów $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ gdzie v_i jest minimalną wartością akceptowalnej posady w momencie i (w momencie n zawsze należy przyjąć posadę). Rozkład wartości dostępnych posad w momencie i zależy od progów v_1, v_2, \dots, v_{i-1} . Wektor ten spełnia układ $n-1$ równań wynikających z kryterium optymalności. Gdy rozkład wartości posad jest ciągły, można rozwiązać układ ten metodami numerycznymi. Praca przedstawia też dwa podejścia do wyznaczenia równowagi, gdy rozkład wartości posad jest dyskretny oraz warunki, przy których istnieje tylko jedna równowaga.

W pracy *A large population game theoretic model of job-search with discounting* rozważam podobną grę, w której czas jest ciągły i pracobiorcy obserwują oferty według odpowiedniego procesu Poissona. Pracodawcy są niewybredni. Wartości posad pochodzą z rozkładu dyskretnego. Gdy pracobiorca przyjmuje posadę i posada, i pracobiorca znikają z rynku pracy. Więc rozkład wartości dostępnych posad się zmienia w czasie według strategii używanych w populacji. Model ten zakłada że czas poszukiwania jest nieograniczony, ale podejście można łatwo zaadaptować do problemów gdzie czas ten jest ograniczony. Pokazano, że istnieje dokładnie jedna równowaga takiej gry. Równowaga ta jest wyznaczona za pomocą procedury iteracyjnej. Najpierw wyznaczamy rozkład wartości dostępnych posad w dowolnej chwili t przy założeniu że każdy pracobiorca używa strategii π_0 . Potem możemy wyznaczyć optymalną odpowiedź pojedynczego pracobiorcy, oznaczoną π_1 , przy takim tle. W analogiczny sposób wyznaczamy odpowiedź pojedynczego pracobiorcy, π_{i+1} , gdy każdy pracobiorca używa strategii π_i , $i = 1, 2, \dots$. Ciąg tych najlepszych odpowiedzi dąży do równowagi Nasha tej gry.

Następne trzy prace rozważają bardziej realistyczne modele poszukiwania pracy. W wszystkich tych pracach, i pracodawcy i pracobiorcy są wybredni. Prace *Partnership formation based on multiple traits* oraz *A Model of Partnership Formation with Friction and Multiple Criteria* uwzględniają fakt, że np. pracodawca zbiera informacje dotyczące wartości pracobiorcy dzięki obserwacji różnych cech i niektóre cechy dają się łatwiej zaobserwować niż inne. W klasycznych modelach typu poszukiwania pracy preferencje są „wspólne”, tzn. każdy pracodawca ocenia wartość danego pracobiorcy jednakowo. Natomiast, według tych nowych modeli różni pracodawcy mogą różnie ocenić wartość pracobiorcy, chociaż np. wszyscy pracodawcy wolą pracobiorców o wysokich kwalifikacjach (gdzie kwalifikacje są jedną cechą ze zbioru cech pracobiorcy). Cechy te mają znany rozkład łączny. W pracy *Partnership formation based on multiple traits* są one zmiennymi ciągłymi a w pracy *A Model of Partnership Formation with Friction and Multiple Criteria* zmiennymi dyskretnymi. Podobnie, pracobiorcy mogą różnie ocenić wartość pracodawcy, choć np. wszyscy pracobiorcy wolą dużą pensję od małej (gdzie pensja jest jedną cechą z zbioru cech posady). Czas jest dyskretny i horyzont czasowy nieskończony. Z punktu widzenia pracodawcy, obserwuje on ciąg pracobiorców aż zatrudni jednego (po wzajemnej akceptacji). W każdym momencie pracodawca najpierw obserwuje sygnał wartości losowo wybranego pracobiorcy (sygnał ten zależy od zbioru cech tego pracobiorcy) i w oparciu o to musi zdecydować czy ma zaprosić pracobiorcę na rozmowę czy nie (np. można zinterpretować ten sygnał jako kwalifikacje zawodowe tego pracobiorcy). Rozmowa odbywa się tylko przy wzajemnej akceptacji. Za pomocą takiej rozmowy pracodawca otrzymuje więcej informacji dotyczących wartości pracobiorcy (np. można założyć że informacje te dotyczą stopnia dopasowania pracobiorcy do pracodawcy). Po rozmowie obie strony muszą zdecydować czy chcą pracować razem (wymagana jest wzajemna akceptacja) czy chcą szukać dalej. Wypłata pracodawcy jest zdefiniowana jako wartość pracobiorcy zatrudnionego (która zależy od cech i pracobiorcy i pracodawcy) minus koszty poszukiwania, zdefiniowane jako suma kosztów rozmów

(tylko ponoszone, gdy odbyła się rozmowa) i kosztów obserwacji wstępnych sygnałów (które są proporcjonalne do liczby wszystkich pracobiorców zaobserwowanych). Z punktu widzenia pracobiorcy, gra wygląda analogicznie. Najpierw pracobiorca obserwuje wstępny sygnał o wartości pracy (np. można zinterpretować ten sygnał jako pensję) i jeżeli dochodzi do rozmowy, wtedy obserwuje stopień dopasowania się pracodawcy do siebie.

W pracy McNamary i Collinsa [1990] w równowadze i pracodawcy i pracobiorcy są podzieleni na k grup, oznaczono $1, 2, \dots, k$, tak, że pracodawcy z grupy j zatrudniają tylko pracobiorców z grupy j (równoważnie, pracobiorcy z grupy j zatrudniają się tylko u pracodawców z grupy j). Jest to tak zwane „block separating equilibrium”, czyli równowaga posiadająca następującą własność: gdy w równowadze pracodawca A zatrudniłby pracobiorców C i D a pracodawca B zatrudniłby pracobiorcę C (z wzajemną akceptacją), wtedy pracodawca B zatrudniłby pracobiorcę D (z wzajemną akceptacją). W obu rozważanych pracach pokazano, że istnieje dokładnie jedna równowaga rozważanej gry spełniająca kryterium optymalności (choć w innej pracy pokazałem, że w innych grach o podobnej strukturze może istnieć kilka takich równowag). Gdy koszty rozmów są wysokie, wtedy równowaga ta jest typu „block separating equilibrium”, gdzie rozmowy są niepotrzebne i pracodawcy patrzą tylko na kwalifikacje pracobiorcy a pracobiorcy tylko patrzą na pensję. Ale gdy koszty rozmów są wystarczająco niskie, wtedy postać równowagi istotnie się różni. Metoda wyznaczenia równowagi zależy od typu rozkładu cech. Gdy rozkład ten jest ciągły, wyznacza się równowagę za pomocą odpowiedniego równania różniczkowego, a gdy rozkład jest dyskretny, za pomocą odpowiedniego algorytmu.

Modele te zakładają, że gdy gracz wypada z rynku pracy (bo zatrudnia pracobiorcę lub zostaje zatrudniony, w zależności od klasy gracza), wtedy wchodzi na rynek jego „klon” (czyli gracz o tej samej klasie i cechach). Wynika z tego że rozkład łączny tych cech nie zmienia się w czasie. W rzeczywistości cechy graczy wchodzących na rynek pracy nie zależą od cech tych wypadających z rynku pracy. Burdett i Coles [1999] rozważają taki model, według którego nowi pracodawcy i pracobiorcy wchodzi na rynek pracy z jednostajną intensywnością. Można przedstawić taki model w następujący sposób: zakładamy że populacje i posady i pracobiorców są duże oraz pracodawcy (posady) i pracobiorcy wchodzi na rynek pracy z tą samą (stałą) intensywnością α (czyli liczba posad równa się liczbie pracobiorców). Rozkład wartości wchodzących pracobiorców, oznaczono F_w , (i analogicznie rozkład wartości wchodzących pracodawców, oznaczono F_e) nie zmienia się w czasie. Każdy pracodawca obserwuje ciąg pracobiorców, którzy się pojawiają według procesu Poissona. Intensywność tego procesu jest funkcją γ niemalejącą względem liczby pracobiorców obecnych na rynku. Gdy pracodawca zatrudnia pracobiorcę (wymagana jest wzajemna akceptacja), przestaje szukać i otrzymuje wypłatę równą wartości pracobiorcy dyskontowanej według czasu, przez który pracodawca był na rynku pracy. Z punktu widzenia pracobiorcy, obserwuje on ciąg pracodawców, którzy się pojawiają według procesu Poissona o intensywności γ . Gdy pracobiorca zostaje zatrudniony, przestaje szukać i otrzymuje wypłatę równą wartości posady dyskontowanej według czasu, przez który szukał.

Rozkłady wartości pracobiorców i pracodawców obecne na rynku pracy, oznaczono G_w i G_e odpowiednio, i zależą od następujących parametrów: α , F_w i F_e , które określają jak szybko posady i pracobiorcy o określonej wartości pojawiają się na rynku, oraz γ i strategii używanych przez pracodawców i pracobiorców, które określają jak szybko posady i pracobiorcy o określonej wartości znikają z rynku. Można pokazać, że gdy te parametry opisane powyżej są dane, rozkłady G_w i G_e dążą do stanu

ustalonego. Wynika z tego że w równowadze i pracodawcy i pracobiorcy używają strategii progowej (czyli równowaga jest tej samej postaci co w grze McNamary i Collinsa [1990]). Natomiast, trudno wyznaczyć równowagę tej gry z powodu sprzężenia zwrotnego między rozkładami G_w i G_e a strategiami używanymi przez graczy. Ogólnie, można aproksymować równowagę za pomocą metody iteracyjnej.

Burdett i Coles pokazują że w tej grze może istnieć kilka równowag spełniających kryterium optymalności. Na przykład, zakładamy, że są dwa typy i pracodawców i pracobiorców, zwane dobrymi i złymi, intensywność znalezienia kandydatów na partnera nie zależy od liczby osób na rynku pracy oraz proporcja dobrych graczy (i pracodawców i pracobiorców) wchodzących na rynek pracy wynosi p , gdzie $p < 0.5$. W tym przypadku mogą istnieć dwie równowagi gry. Przy pierwszej równowadze dobrzy gracze przyjmują tylko dobrych partnerów, więc źli pracodawcy zatrudniają tylko złych pracobiorców. W tym przypadku, dobrzy gracze spędzają średnio więcej czasu na rynku pracy niż źli gracze, więc dobrzy gracze stanowią większą proporcję tych obecnych na rynku pracy niż tych, którzy wchodzi na rynek. To powoduje, że opłaca się dobremu pracodawcy poczekać, aż pojawi się dobry pracobiorca. Przy drugiej równowadze żaden gracz nie jest wybredny (czyli pracodawca zatrudnia pierwszego pracobiorcę i pracobiorca się zatrudnia u pierwszego pracodawcy). W tym przypadku, dobrzy gracze stanowią tylko proporcję p tych obecnych na rynku pracy. To powoduje, że nie opłaca się dobremu pracodawcy czekać, aż pojawi się dobry pracobiorca.

Model Burdetta i Colesa jest więc modelem rynku dynamicznego. Inna cecha takiego rynku (której Burdett i Coles nie biorą pod uwagę) jest to, że np. wartość pracobiorcy może się zmienić w czasie, skoro może on np. się doksztąpić. W klasycznych modelach typu poszukiwania pracy, wartość gracza jest ustalona i nie zmienia się w czasie. Mało jest modeli, gdzie wartość graczy zmienia się w czasie według jakiegoś procesu. W pracy *Partnership formation with age-dependent preferences* rozważamy model, w którym nowi gracze się pojawiają i ich wartości jako partnerzy się zmieniają w czasie (w zależności od wieku gracza). W tym modelu pracodawcy i pracobiorcy pojawiają się na rynku pracy ze stałą intensywnością w wieku 0. Wiek gracza równa się czasowi, przez który jest na rynku pracy. Rozważamy grę symetryczną gdzie i pracodawcy i pracobiorcy pojawiają się na rynku z tą samą intensywnością i mogą zostać na rynku przez ten sam czas (w innej pracy rozważam grę asymetryczną tego typu). Bez utraty ogólności, można przyjąć, że przez jednostkę czasu. Pracodawcy obserwują ciąg pracobiorców, którzy pojawiają się według procesu Poissona o stałej intensywności γ . Każdy pracobiorca zostaje losowo wybrany ze zbioru wszystkich pracobiorców bez pracy, czyli wiek jego pochodzi z rozkładu wieku takich pracobiorców. Gdy pracodawca przyjmuje pracobiorcę, obaj znikają z rynku pracy i dostają wypłaty, które zależą od wieku obu graczy. Jeżeli pracodawca osiąga wiek 1 i jeszcze nie zatrudnił nikogo, znika z rynku. Problem pracobiorcy jest analogiczny. W ten sposób, rozkłady wieku i pracobiorców i pracodawców na rynku pracy zależą od strategii używanych w całej populacji. Należy zauważyć że gęstość rozkładu wieku pracobiorców w punkcie t , $g_w(t)$, $0 \leq t \leq 1$, jest proporcjonalna do prawdopodobieństwa tego, że pracobiorca jeszcze szuka pracy w wieku t (wystarczy znormalizować tę funkcję, żeby pole pod gęstością równało się 1). Pokazujemy, że gdy wypłaty graczy spełniają pewne warunki, wtedy przy równowadze gracz w wieku t przyjmuje partnera w wieku $\leq f(t)$, gdzie f jest funkcją rosnącą. Więc strategia jest progowa.

Aby wyznaczyć równowagę takiej gry, korzystamy z metody iteracyjnej. Najpierw zakładamy że pracodawcy nie chcą przyjąć żadnego pracobiorcy, a pracobiorcy przyjęliby dowolnego pracodawcę. Przy takim tle, rozkład wieku

pracobiorców na rynku jest jednostajny. Możemy więc wyznaczyć optymalną strategię pojedynczego pracodawcy, daną progiem $f_e(t)$, i prawdopodobieństwo tego, że on jeszcze szuka w wieku t , $p_e(t)$. Potem zakładamy, że wszyscy pracodawcy korzystają ze strategii $f_e(t)$ a rozkład wieku pracodawców odpowiada funkcji $p_e(t)$. Wtedy wyznaczamy optymalną strategię pojedynczego pracobiorcy, $f_w(t)$, i prawdopodobieństwo tego, że on jeszcze szuka w wieku t , $p_w(t)$. Dalej, zakładamy że wszyscy pracobiorcy korzystają z strategii $f_w(t)$ a rozkład wieku pracobiorców odpowiada funkcji $p_w(t)$ i wyznaczamy optymalną strategię pojedynczego pracodawcy przy tym tle. Powtarzamy ten proces, aż funkcje $f_e(t)$, $p_e(t)$, $f_w(t)$ i $p_w(t)$ zbiegają do swoich granic. Należy zauważyć, że gdy wszyscy pracodawcy używają strategii $f_e(t)$, ogólnie prawdopodobieństwo tego, że dany pracodawca jeszcze szuka różni się od $p_e(t)$, prawdopodobieństwa tego, że optymalnie zachowujący się pracodawca w poprzednim kroku jeszcze szuka. Ale gdy algorytm ten jest zbieżny, strategia optymalnie zachowującego się pracodawcy dąży do strategii używanych przez resztę pracodawców. Wynika z tego, że jeżeli ten proces jest zbieżny, $f_e(t)$ i $f_w(t)$ opisują strategię pracodawców i pracobiorców w równowadze, a $p_e(t)$ i $p_w(t)$ odpowiadają rozkładowi wieku pracodawców i pracobiorców na rynku pracy. Można zacząć ten proces iteracyjny od innego profilu strategii. Wyniki numeryczne sugerują, że istnieje dokładnie jedna równowaga takiej gry. Jest to równowaga symetryczna, czyli pracodawcy używają tej samej strategii co pracobiorcy.

Ostatnia praca, *Large population evolutionary games played within a life history framework*, nie jest bezpośrednio związana z modelami poszukiwania pracy, ale chciałbym wykorzystać pojęcia z tej pracy w swoich przyszłych badaniach dotyczących modeli rynku pracy. W tej pracy rozważam gry z kontinuum graczy, gdzie gracze mogą być z różnych klas (np. pracodawców i pracobiorców). Gracze przechodzą przez różne stany w zależności od swojej klasy, cech, strategii i tła gry, które zależy od strategii używanych przez resztę graczy. W danym przedziale czasu, gracz dostaje pewną wypłatę zależną od stanów, przez które przeszedł, czasu pobytu w każdym z tych stanów oraz strategii i cech graczy, z którymi miał kontakt. W takich grach należy zmaksymalizować intensywność wypłat (gdy ani czas, który gracz spędza w grze, ani jego cechy nie zależą od jego strategii) lub oczekiwaną sumę dyskontowanych wypłat (w pozostałych przypadkach).

Więc, na przykład, w ramach takiego modelu możemy rozważyć populację pracobiorców. W danej chwili pracobiorca może się doksztalać, pracować lub być bezrobotnym. Na przykład, gdy pracobiorca doksztala się, może on podnieść swoją wartość na rynku pracy, ale w tym czasie mało zarabia. Gdy jest bezrobotnym, może on szukać odpowiedniej pracy lub studiów i w ten sposób z odpowiednim prawdopodobieństwem w krótkim okresie czasu może zostać studentem lub pracownikiem (czyli zmienić swój stan). Gdy pracuje, intensywność wypłat zależy od pracodawcy. Ciekawa byłaby analiza dynamiki takiego systemu, gdy pracobiorcy i pracodawcy korzystają z odpowiednich strategii i zobaczyć jakie profile strategii są najbardziej odporne na perturbację systemu.

Dodatkowa Literatura

[1.] Stigler, George J. (1961). *The economics of information*. Journal of Political Economy **69** (3): 213–225.

[2.] McNamara J. M., Collins E. J. (1990) *The job search problem as an employer-candidate game*. Journal of Applied Probability **27** (4): 815-827.

[3.] Burdett K., Coles M. G. *Long-term partnership formation: marriage and employment*. The Economic Journal, **109**, 307-334 (1999).

D M Ramsey

David Mark Ramsey

